Kapitel 7 – Differenzierbarkeit

Die Begriffe GRENZWERT und STETIGKEIT werden in Mathematikvorlesungen genau definiert. Hier sollen nur die Ideen verdeutlicht werden.

Definition 7.1 (Grenzwert und Stetigkeit)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$ ein Punkt in I und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl.

1. *Die Funktion f hat in x_0 den* GRENZWERT *a, wenn sich für alle $x \in I$ "in der Nähe von x_0" die Werte $f(x)$ nur "um beliebig wenig von a unterscheiden". Schreibweise:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \to a \text{ für } x \to x_0.$$

2. *Die Funktion f heißt* STETIG *in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
3. *f heißt* STETIG *auf I, wenn f in allen Punkten von I stetig ist.*

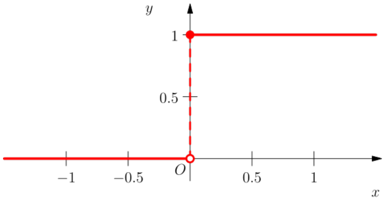
Beispiele: Polynome, Betrag, Sinus, Cosinus sind stetig.

7. Beispiel einer unstetigen Funktion

Funktionen, die SPRUNGSTELLEN haben, sind unstetig.

<u>Heaviside-Funktion:</u> $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ 1, & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$



ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, denn:

Nähert man sich mit x dem Punkt 0 "von links" an, so "verharrt" der Funktionswert $H(x)$ im Wert 0. Für den Funktionswert $H(0)$ gilt aber $H(0) = 1 \neq 0$.

Die Heaviside-Funktion hat also in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle und ist dort daher nicht stetig.

Definition 7.2 (Differenzierbarkeit)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... DIFFERENZIERBAR IM PUNKT $x_0 \in I$, *wenn der Grenzwert des* DIFFERENZENQUOTIENTEN

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

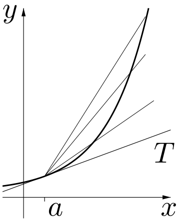
   existiert. Dieser Wert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt die ABLEITUNG *von f an der Stelle x_0.*

2. ... DIFFERENZIERBAR AUF I, *wenn f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$f' : I \to \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

   die ABLEITUNG *von f.*

Die Ableitung einer Funktion f kann man geometrisch interpretieren.



Die Steigung der Tangente T im Punkt a ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

Definition 7.3 (Tangente)

Die Gerade mit der Gleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

heißt TANGENTE *an den Graphen von* f *im Punkt* $\big(x_0, f(x_0)\big)$ *(kurz auch: Tangente an* f *in* x_0*).*

Beispiel 7.4 (Grundlegende Beispiele)

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$,	$n \in \mathbb{N}$

$f(x)$	$f'(x)$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$,	$n \in \mathbb{N}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

Beobachtung: In der rechten Spalte taucht $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nie auf!

Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet anschaulich, dass sich die Funktionswerte von f in einer “kleinen Umgebung von x_0” gut durch die Werte der Tangente annähern lassen. Man sagt auch:

f ist LINEAR APPROXIMIERBAR.

Satz 7.5

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht! Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Beispiel: $f(x) = |x|$.

Satz 7.6 (Differentiationsregeln)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen und* $c \in \mathbb{R}$.

1. Vielfache $(cf)' = cf'$
2. Summenregel $(f+g)' = f' + g'$
3. Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ *(für* $g(x) \neq 0$*)*

Satz 7.7 (Kettenregel)

Seien g *differenzierbar an der Stelle* x *und* f *differenzierbar an der Stelle* $g(x)$. *Dann ist* $f \circ g$ *differenzierbar an der Stelle* x *mit Ableitung*

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

7. Beispiele zur Anwendung der Differentiationsregeln

1. Für $f(x) = x^2 \sin x$ gilt
$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$
2. Für $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ gilt
$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$
3. Für eine differenzierbare Funktion f und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$
4. Für eine differenzierbare Funktion f mit $f(x) \neq 0$ gilt
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Satz 7.8 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Die Funktion $f : I \to J$ habe eine Umkehrfunktion f^{-1}. Außerdem sei f im Punkt $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$.
Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y = f(x) \in J$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Herleitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$f(f^{-1}(y)) = y \;\Rightarrow\; f'(\underbrace{f^{-1}(y)}_{=x}) \left(f^{-1}\right)'(y) = 1.$$

<u>Beispiel:</u> $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ mit $f(x) = \sin(x)$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(y) = \arcsin(y).$$

Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $f'(x) = \cos(x) > 0$, also

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

7. Weitere Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(n \in \mathbb{N})$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Definition 7.9 (Höhere Ableitungen)

1. *Ist f differenzierbar und die Ableitung f' stetig auf I, so nennt man f* STETIG DIFFERENZIERBAR.
2. *Sind f und f' differenzierbar auf I, dann nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die* ZWEITE ABLEITUNG *von f.*
3. *Ebenso definiert man höhere Ableitungen f''', $f^{(4)}$, ...*
4. *f heißt* k-MAL STETIG DIFFERENZIERBAR, *wenn $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.*

Anwendung: Kurvendiskussion

1. Nullstellen, Pole, Asymptoten
2. Monotonieverhalten und Extremwerte
3. Krümmungsverhalten und Wendepunkte

7. Typische Anfängerfehler

1. Nichtbeachtung der Quotientenregel. Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet:
$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \neq \frac{1}{2x}.$$
2. Beim Ableiten verketteter Funktionen wird die innere Ableitung vergessen:
$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' \neq \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$
3. Ableitung parameterabhängiger Funktionen nach dem Parameter statt nach der Variablen: Für $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(2nx)$ gilt
$$f'(x) \neq 2x\cos(2nx).$$
Tatsächlich ist $f'(x) = 2n\cos(2nx)$.