Kapitel 9 – Integralrechnung

Definition 9.1 (Stammfunktion)

Es seien $f, F : I \to \mathbb{R}$ *Funktionen.* F *heißt* $\textsc{Stammfunktion}$ *von* f *auf* I*, wenn*

1. F *auf* I *differenzierbar ist,*
2. $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in I$.

Satz 9.2

1. *Ist* F *eine Stammfunktion von* f*, so ist auch* $G := F + c$ *mit einer beliebigen Konstanten* $c \in \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* f.
2. *Sind* G *und* F *zwei Stammfunktionen von* f*, so gibt es eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $G(x) = F(x) + c$.

Fazit: Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Definition 9.3 (unbestimmtes Integral)

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt UNBESTIMMTES INTEGRAL *von f und wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet. Ist F eine Stammfunktion zu f, so schreiben wir auch*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,.$$

Satz 9.4 (Erste Eigenschaften: Linearität)

1. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
2. $\int \big(c \cdot f(x)\big)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$ *für $c \in \mathbb{R}$.*

9. Grundintegrale

Um an erste unbestimmte Integrale bzw. Stammfunktionen zu kommen, lesen wir die Ableitungstabellen aus Kapitel 7 rückwärts:

Beispiel 9.5

1. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + c$
3. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ *und* $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$ *und* $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$

Die Produkt- und Substitutionsregel für Ableitungen können genutzt werden, um weitere unbestimmte Integrale zu erhalten.

Satz 9.6 (Partielle Integration)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

.

Beispiel:

Für $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ gilt $f'(x) = 1$, $g'(x) = \cos x$, also

$$\int x \cdot \cos x\, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

Satz 9.7 (Substitution)

Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt
$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c.$$

Beispiel:

Für $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2$ gilt $g'(x) = 2x$ und $F(x) = \sin(x)$ ist eine Stammfunktion von f. Somit folgt

$$\int \cos(x^2) \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c.$$

Alternativ: Substituiere $y := x^2$ und rechne symbolisch

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x \Leftrightarrow x\, dx = \frac{dy}{2}.$$

Damit ergibt sich ebenfalls

$$\int \cos(x^2) \cdot x\, dx = \int \cos(y) \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sin(y) + c = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c.$$

Folgerung 9.8

Es sei F eine Stammfunktion zu f. Dann ist

1. $\displaystyle\int f(x+a)\,dx = F(x+a) + c$
2. $\displaystyle\int f(a\cdot x)\,dx = \frac{1}{a}F(a\cdot x) + c$
3. $\displaystyle\int g(x)\cdot g'(x)\,dx = \frac{1}{2}\big(g(x)\big)^2 + c$
4. $\displaystyle\int x\cdot f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\cdot F\left(x^2\right) + c$

Definition 9.9 (bestimmtes Integral)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat der Wert $F(b) - F(a)$ für jede Stammfunktion F von f den gleichen Wert. Dieser Wert heißt BESTIMMTES INTEGRAL *von f in den Grenzen a und b und wird mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

bezeichnet. Man nennt

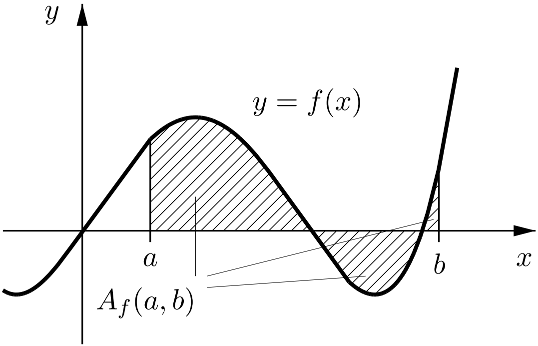
- f *den* INTEGRAND,
- a *die* UNTERE INTEGRATIONSGRENZE,
- b *die* OBERE INTEGRATIONSGRENZE,
- $[a,b]$ *das* INTEGRATIONSINTERVALL.

Bemerkung: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ definiert man ebenfalls

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a).$$

Integral und Flächeninhalt

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ lässt sich als der orientierte Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a, b]$ deuten.



Satz 9.10 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ *und* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$
3. $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x).$
4. *Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

5. *Ist $f(x) \leq g(x)$ so ist* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

Satz 9.11 (geometrischer Flächeninhalt)

Es sei f integrierbar. Der GEOMETRISCHE FLÄCHENINHALT $A_f(a,b)$ *von f auf dem Intervall $[a,b]$ ist definiert als Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.*

Dieser lässt sich gemäß $A_f(a,b) = \int_a^b |f(x)|\,dx$ berechnen.

Beispiel 9.12

Für $f(x) = x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion. Damit gilt also

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

aber

$$A_f(-1,1) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\left(F(x)\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}.$$

9. Typische Anfängerfehler

1. Die Stammfunktion von $f(g(x))$ wird als $F(g(x))\frac{1}{g'(x)}$ angegeben,
$$\int \cos(x^2)\,dx \neq \frac{\sin(x^2)}{2x} + c.$$
2. Bei der Substitutionsregel werden die Integrationsgrenzen nicht mitsubstituiert:
$$\int_0^1 \underbrace{(1+x^3)^2}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)}\,dx \neq \int_0^1 t^2\,dt.$$
3. Der Betrag $|x|$ wird zu $\frac{1}{2}|x|^2$ integriert:
$$\int_{-1}^1 |x|\,dx \neq \frac{1}{2}|x|^2\Big|_{-1}^1$$
Tatsächlich muss man das Integral aufteilen:
$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 |x|\,dx + \int_0^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx$$