Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 1:

Zahlenmengen / Mengenoperationen

Definition (1.1)

Unter einer **Menge** M verstehen wir eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte, die in der Menge M enthalten sind, nennt man die **Elemente** der Menge M.

Schreibweisen:

- $a \in M$: a ist ein Element der Menge M.
- $a \notin M$: a ist kein Element der Menge M.

Beispiel: $2 \in \mathbb{N}, \quad -3 \notin \mathbb{N}.$

Mengen können wir beschreiben,

- indem wir ihre Elemente aufzählen, z.B. $M = \{1, 3, 5, 7\}$,
- indem man Eigenschaft(en) angibt, die die Menge bzw. deren Elemente beschreibt, z.B. $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade und } x \leq 7\}$.

Beispiel: In der Menge A sind alle natürlichen Zahlen enthalten, die größer als 6 sind und ohne Rest durch 2 teilbar sind. Mengenschreibweise?

Antwort: $\quad A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k,\ k \geq 4,\ k \in \mathbb{N}\}$

Beispiel: In der Menge B sind alle natürlichen Zahlen enthalten, die kleiner als 36 sind und ohne Rest durch 3 teilbar sind. Mengenschreibweise?

Antwort: $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\}$

Bemerkung (1.2)

Elemente aufzählen bietet sich nur bei Mengen an, die überschaubar groß sind. Große (bzw. unendliche) Mengen kann man natürlich durch ... abkürzen, z.B. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Man muss aber aufpassen, dass die Aufzählung tatsächlich eindeutig ist !

Beispiel: Ist $\{1, 2, 4, ...\}$ eindeutig?
Sprich: Ist das Muster der Fortsetzung hier absolut klar? Antwort: Nein ! Denn die Menge kann z.B. so weitergehen: $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$. Das haben wohl die meisten von Euch so gedacht. ABER: Die Menge könnte auch so weitergehen: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...\}$. Oder noch ganz anders.... das Muster wird eben durch das Aufzählen von ein paar Zahlen nicht eindeutig klar. Es ist also stets besser, Mengen mit Eigenschaften zu beschreiben... !

Bemerkung (1.3)

Die Reihenfolge der Elemente einer Menge oder die mehrfache Aufzählung eines Elements spielen keine Rolle.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{5, 4, 1, 3, 2\} = \{5, 4, 1, 1, 3, 1, 2\}$.

Welche Mengen haben Sie schon in der Schule gemacht?
Natürliche Zahlen, Ganze Zahlen, Rationale Zahlen, (Irrationale Zahlen), Reelle Zahlen. Wir wiederholen das kurz:

Definition (1.4)

Die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ bezeichnen wir als die **natürlichen Zahlen**.

Starten wir mit dem kleinsten Element $n = 1$, so erhalten wir die nächste natürliche Zahl, indem wir 1 dazu addieren, also $n + 1$ bzw. hier dann das Element 2.
Machen wir das so immer weiter, erhalten wir alle natürlichen Zahlen.

Bemerkung (1.5)

$0 \notin \mathbb{N}$. Die Zahl 0 ist also in den natürlichen Zahlen nicht enthalten.

Manchmal will man aber die Null und alle natürlichen Zahlen in einer Menge haben. Dafür gibt es die Menge $\boxed{\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}}$

Man sagt: $\mathbb{N}_0$ ist die **Vereinigung** von $\mathbb{N}$ und $\{0\}$.
Mathematisch schreibt man das so: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir kommen später auf Vereinigung (und Schnitt) von Mengen zurück.

1.1 - Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen als Zahlenmenge reichen nicht aus.
So ist z.B. die Gleichung

$$x + 2 = 0$$

nicht für $x \in \mathbb{N}$ lösbar. Dies funktioniert aber mit dem folgenden Zahlbereich:

Definition (1.6)

$\mathbb{Z} := \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ ist die Menge der **ganzen Zahlen** .

Damit können wir die obige Gleichung lösen und erhalten: $x = -2 \in \mathbb{Z}$ $\square$

Für andere Aufgaben brauchen wir aber noch mehr Zahlbereiche:

Definition (1.7)

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der **rationalen Zahlen**, enthält also alle Brüche $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Sollten a und b nicht **teilerfremd** sein (also noch kürzbar), so machen wir das und erhalten dann auch eindeutige Zahlen.

Beispiel: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$. $\frac{4}{6}$ ist also nur eine andere Schreibweise für $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Definition (1.8)

Die Menge $\mathbb{I}$ der Zahlen, die man nicht so als Bruch darstellen kann, nennen wir die **irrationalen Zahlen**.

Beispiele irrationaler Zahlen:

- Die Zahl $\pi = 3,141592653589793\ldots$ ist irrational

  Wo taucht π auf? Z.B. beim Umfang U eines Kreises mit Radius $r = \dfrac{1}{2}$

  Denn: Wir wissen: $U = 2 \cdot \pi \cdot r \overset{r=\frac{1}{2}}{=} 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$

  Man kann zeigen: π lässt sich nicht als Bruch darstellen, ist also irrational.
- Die **Eulersche Zahl** $e = 2,718281828\ldots$ ist irrational.
- $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$ ist irrational. Der Beweis, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellen lässt, ist sogar relativ einfach.

Hinweis: Solche "irrationalen" Zahlen gehen hinter dem Komma unendlich weiter, sind aber **nicht** periodisch. Alle anderen Kommazahlen (also auch die periodischen) sind auf jeden Fall rational.

Definition (1.9)

$\mathbb{R}$ ist die Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen, also die sogenannte Vereinigung von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$. Wir nennen $\mathbb{R}$ die Menge der **reellen Zahlen**.

Auf die vielen (guten) Eigenschaften der reellen Zahlen gehen wir hier vorerst nicht weiter ein. Wir benutzen diese einfach ... genau wie in der Schule.

Vorgriff: Später noch eine weitere Zahlenmenge: Die **Komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathbb{C} := \{z = x + y \cdot i \mid x,\ y \in \mathbb{R},\ i \text{ die sogenannte } \textbf{imaginäre Einheit}\}}$$

Wo tauchen solche Zahlen auf? Wir betrachten das Polynom $x^2 + 1$ und wollen dessen Nullstellen berechnen:

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

In der Schule habt Ihr nun immer bei einer negativen Wurzel aufgehört und geschrieben: Keine Lösung in $\mathbb{R}$. Das ist auch richtig so... aber es hat Lösungen in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:
Die Grundidee ist hier einfach, dass wir die sogenannte **imaginäre Einheit** i einführen. Diese hat eine wichtige Eigenschaft, nämlich: $\boxed{i^2 = -1}$
Damit können wir die obige Gleichung lösen und wir erhalten als Lösungen dann: $x_1 = i$ und $x_2 = -i$. (nachrechnen bzw. für x einsetzen... passt !)

Damit folgt dann später: Jedes Polynom in $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle. Wir bekommen dann sogar raus: Ein Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Weitere **Beispiele:**

- $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
- Die **leere Menge** $\emptyset$ (oder auch geschrieben $\{\ \}$) ist die Menge, die kein Element enthält.
- Für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ definieren wir $\mathbb{N}_{\geq k} := \{k, k+1, k+2, ...\}$, also z.B. $\mathbb{N}_{\geq 5} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Nachdem wir nun schön öfters davon gesprochen haben, hier endlich die Definitionen für Vereinigung, Schnitt, etc. :

Definition (1.10)

Seien A und B Mengen. Wir definieren:

1. **Vereinigungsmenge** $A \cup B$: Wir wollen die beiden Mengen "vereinigen", also beide Mengen zusammenpacken in eine Menge. In dieser sind also dann alle Elemente, die vorher in A oder in B waren.

   Also $\boxed{A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}}$

   Hinweis: Das mathematische "oder" ist nicht ausschließend. Die Elemente dürfen also auch in beiden Mengen liegen.

Beispiel: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}, \quad \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

Definition (1.10)

2. **Schnittmenge** $A \cap B$: Wir wollen den Schnitt der beiden Mengen bilden, also gesucht sind die Elemente, die in **beiden** Mengen, also in A und B enthalten sind.
   Also:
   $$\boxed{A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}}$$

Beispiel: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ (hier ist $\emptyset$ die **leere Menge**)
$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$
$(\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

Definition (1.10)

Seien A und B Mengen. Wir definieren:

3. A **Teilmenge** von B:
   Das ist genau dann der Fall, wenn alle Elemente aus A auch in B enthalten sind.
   Die komplette Gleichheit ist hier nicht ausgeschlossen ! Schreibweise: $A \subseteq B$
   Man kann das auch andersrum definieren:
   B heißt **Obermenge** von A, wenn A Teilmenge von B ist.
   Schreibweise dann: $B \supseteq A$.
   Man nennt A eine **echte Teilmenge** von B, falls A Teilmenge von B, aber $A \neq B$ (also Gleichheit ausgeschlossen!): Schreibweise: $A \subset B$ (bzw. auch $A \subsetneq B$).
4. **Differenzmenge** $B \setminus A$ (gelesen "B ohne A"):
   Wir nehmen also aus der Menge B alle evt. enthaltenen Elemente von A raus.
   Übrig bleibt die Menge der Elemente, die in B enthalten sind, aber nicht in A.
   Also: $\boxed{B \setminus A := \{x \mid x \in B \text{ und } x \notin A\}}$

Beispiele:

1. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$, $\quad \{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,4\} = \{1,3,5\}$

Definition (1.10)

5. Sei G unsere Grundmenge / Obermenge, sei $A \subseteq G$.

   Das **Komplement** von A in G ist definiert als

$$\boxed{A^c := G \setminus A := \{x \mid x \in G \text{ und } x \notin A\}}$$

Beispiel: Gesucht ist das Komplement von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
Antwort: $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$.

Beispiel (1.11)

Seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ gegeben. Bilden Sie:

1. $A \cup B$=?
   Antwort: Wir packen alles zusammen, also: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
2. $A \cap B$=?
   Antwort: Welche Elemente liegen in beiden Mengen? $A \cap B = \{6\}$.
3. Ist A eine Teilmenge von C?
   Antwort: JA, denn alle Elemente von A liegen auch in C.
4. $B \setminus A$=?
   Antwort: Die Elemente von B „abzüglich“der Elemente aus A ergibt:
   $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$.
5. Komplement von A in C?
   Antwort: Wir haben schon gesehen, dass $A \subset C$ gilt.
   Das Komplement von A in C (also $A^C = C \setminus A$) ist dann $\{2, 4, 7, 8, 9\}$.

Beispiel (1.11)

$$A = \{1, 3, 5, 6\},\ B = \{2, 4, 6, 8\},\ C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

6. Bestimmen Sie:

$$(A \cup B) \setminus C, \qquad (A \cap B) \cap C \cap B, \qquad ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \setminus B$$

Antworten:

$$\emptyset, \qquad \{6\}, \qquad \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Bemerkung (1.12)

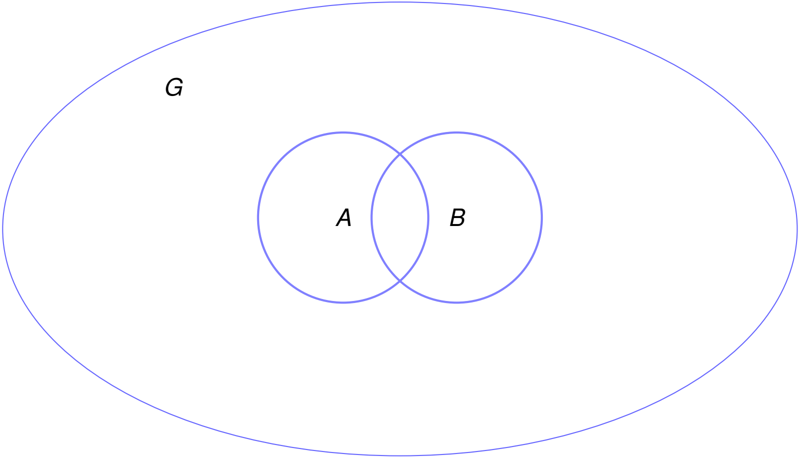
1. Für jede Menge A gilt stets: $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$.
2. Zwei Mengen A und B sind **gleich**, wenn gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
   (Wenn also beide Mengen jeweils Teilmenge der anderen Menge sind)
   Man muss also zum Zeigen einer Mengengleichheit immer zwei Sachen zeigen !

Zur weiteren Anschauung kann man sogenannte „Venn-Diagramme“nutzen.

Wir sehen mal ein paar Beispiele dazu an:

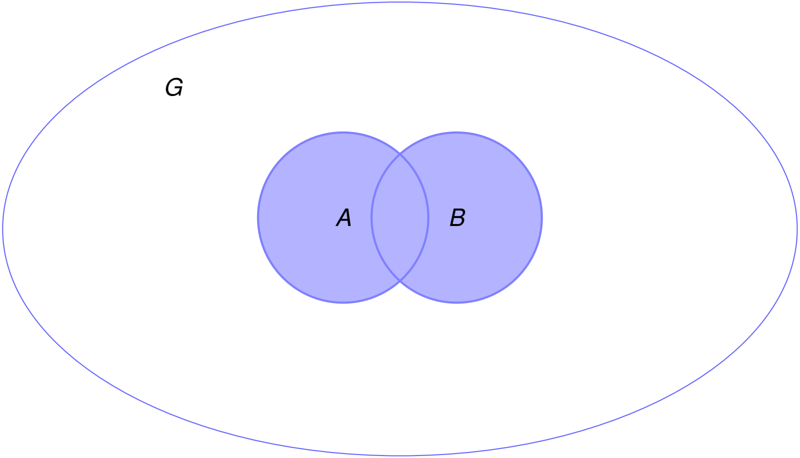
1.2 - Mengenoperationen

1) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $A \cup B$ aussieht:

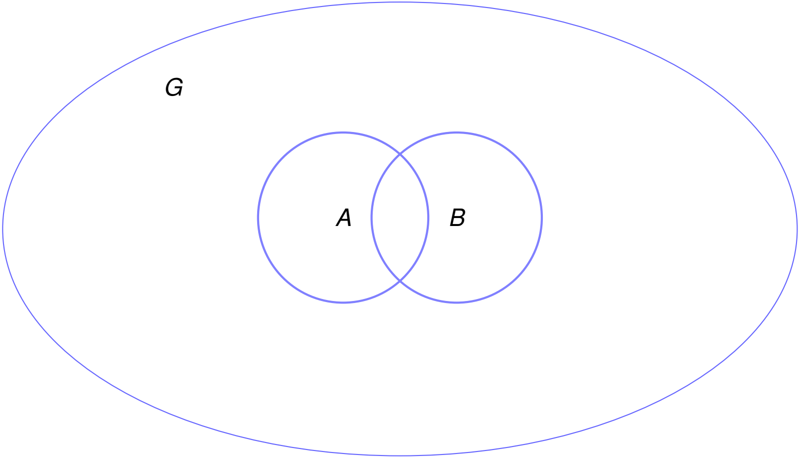


1.2 - Mengenoperationen

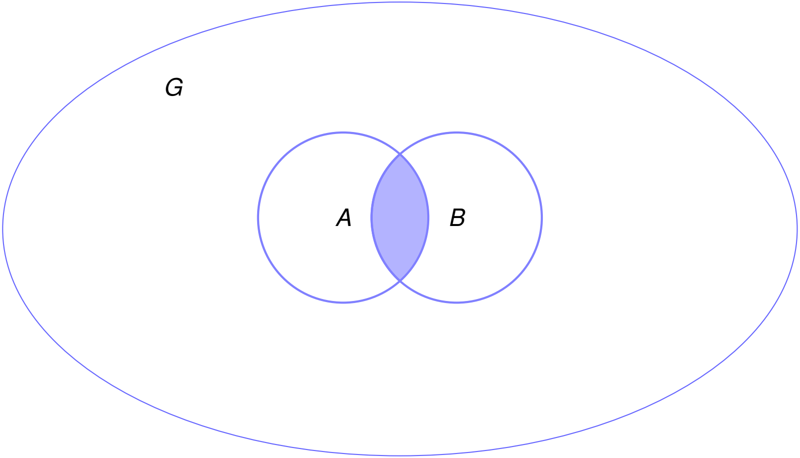
1) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $A \cup B$ aussieht:



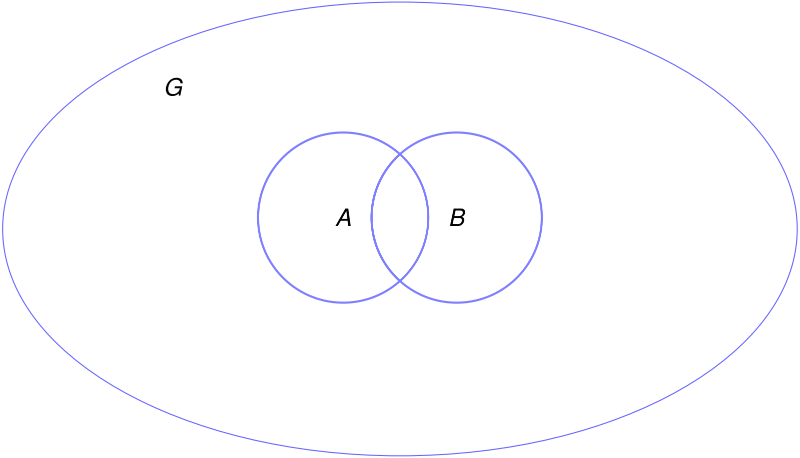
2) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $A \cap B$ aussieht:



2) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $A \cap B$ aussieht:

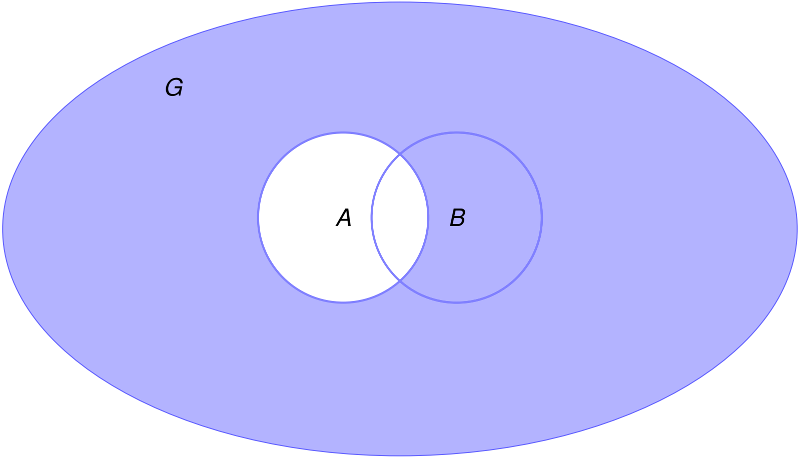


3) Wir möchten herausfinden, wie die Menge A^C aussieht:



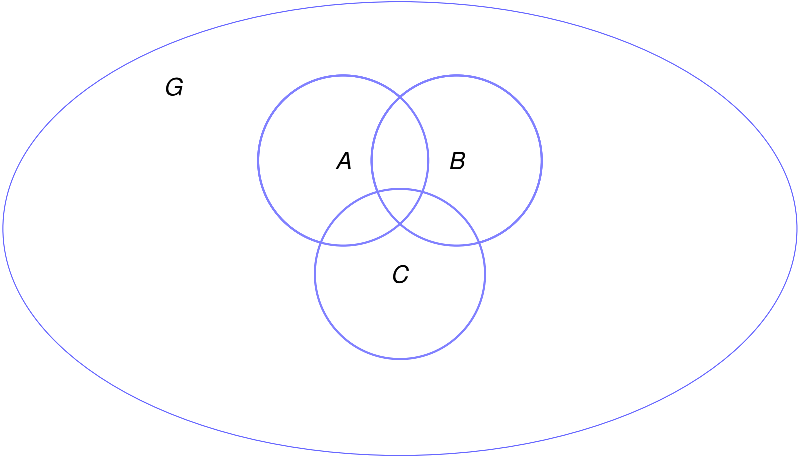
1.2 - Mengenoperationen

3) Wir möchten herausfinden, wie die Menge A^C aussieht:



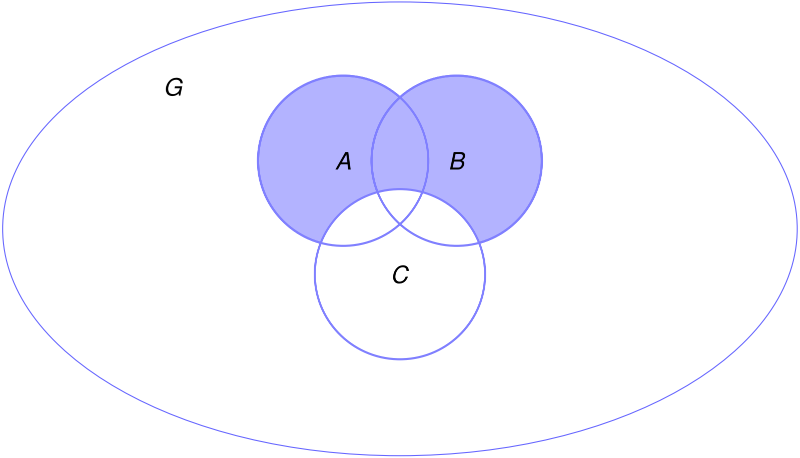
1.2 - Mengenoperationen

4) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $(A \cup B) \setminus C$ aussieht:



1.2 - Mengenoperationen

4) Wir möchten herausfinden, wie die Menge $(A \cup B) \setminus C$ aussieht:



Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !