Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

11.1 - Komplexe Zahlen

Wir haben ja schon in der ersten Vorlesung des Vorkurses und bei Nullstellen von Polynomen kurz über komplexe Zahlen gesprochen.

Ausgangspunkt war das Auftauchen einer negativen Zahl in einer Wurzel in der p-q-Formel... da gab es in der Schule dann KEINE Lösung.

Aber was, wenn man noch Zahlen dazu nehmen würde...? Wir nehmen mal die Zahl i dazu... wir wissen nichts über i... nur... dass sie eine besondere Eigenschaft hat :

$$i^2 = -1$$

Wenn wir das machen, dann bekommen wir bei solchen Gleichungen dann doch Lösungen heraus.

Wir sehen uns das mal am Beispiel an... dann sehen wir auch nochmals, wie so eine komplexe Zahl dann aussieht !

Beispiel (11.1)

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

In $\mathbb{R}$ hat diese Gleichung keine Lösung. Schauen wir uns mal an mit quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \iff \underbrace{z^2 - 4z + \left(\frac{4}{2}\right)^2}_{=(z-2)^2} - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 13 = 0$$

$$\iff (z-2)^2 - 4 + 13 = 0 \iff (z-2)^2 = -9$$

Wir sehen: Beim Auflösen des Quadrates müssten wir rechts aus einer negativen Zahl die Wurzel ziehen. Also KEINE Lösung in $\mathbb{R}$.

Beispiel (11.1)

$$(z-2)^2 = -9$$

Idee: Wir nutzen die Eigenschaft von i (nämlich $i^2 = -1$).

Wir schreiben also -9 um zu $(-1)\cdot 9 = i^2 \cdot 9 = 9i^2 = (3i)^2$ (!)

$$(z-2)^2 = -9 \iff (z-2)^2 = 9i^2 \iff (z-2)^2 = (3i)^2$$

$$\iff z-2 = \pm 3i \iff z = 2 \pm 3i$$, also $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 2-3i$.

Die beiden Lösungen der Gleichung sind also $\boxed{z_1 = 2+3i}$ und $\boxed{z_2 = 2-3i}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{2+3i, 2-3i\}$.

Wir sehen: Durch die bloße Hinzunahme von i mit Eigenschaft $i^2 = -1$ haben wir nicht nur ab sofort eine Möglichkeit JEDE quadratische Gleichung zu lösen... sondern ganz nebenbei auch neue Zahlen kreiert von der Form $z = a + b \cdot i$:
Die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$!

Definition (11.2)

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist:

$$\boxed{\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}}$$

i nennt man die **imaginäre Einheit**.

x heißt der **Realteil** der komplexen Zahl z. Notation: $x = \text{Re}(z)$
y heißt der **Imaginärteil** der komplexen Zahl z. Notation: $y = \text{Im}(z)$

Die Schreibweise $z = x + i \cdot y$ heißt auch die **Koordinaten-Form**.

(Wir werden in HöMa I noch eine Form der Schreibweise einer komplexen Zahl kennenlernen... die sogenannte **Polarkoordinaten-Form**)

Hinweis: Setzen wir $y = 0$, also dann $z = x + 0 \cdot i$, so lässt sich auch jede reelle Zahl als komplexe Zahl schreiben... die reellen Zahlen lassen sich also als eine Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen. Cool, oder?

Beispiel: Bestimme Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

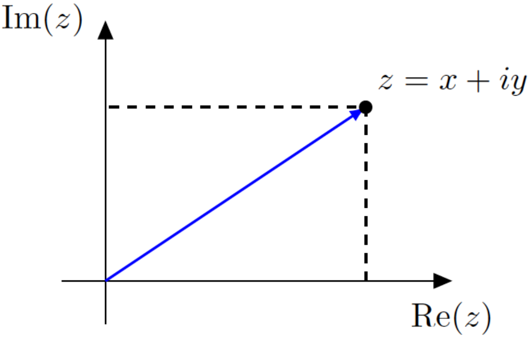
$$z_1 = 5 + 7i \qquad z_2 = -2 + 3i \qquad z_3 = 2 - 7i \qquad z_4 = 3 - i$$

Antworten:

$\mathrm{Re}(z_1) = 5$, $\mathrm{Im}(z_1) = 7$
$\mathrm{Re}(z_2) = -2$, $\mathrm{Im}(z_2) = 3$
$\mathrm{Re}(z_3) = 2$, $\mathrm{Im}(z_3) = -7$
$\mathrm{Re}(z_4) = 3$, $\mathrm{Im}(z_1) = -1$

11.1 - Komplexe Zahlen

Graphisch kann man komplexe Zahlen so veranschaulichen:
Man nimmt das Paar (x, y), also Real- und Imaginärteil von z, und trägt es in die **Gauß'sche Zahlenebene** ein.



Eine komplexe Zahl $z = 4 + 3i$ würde man nun eintragen als Punkt $(4, 3)$.

Wir wollen uns nun ansehen, dass man mit komplexen Zahlen genau so rechnen kann, wie wir das gewöhnt sind.
Das Einzige, was wir beachten müssen, ist die Eigenschaft von i, nämlich $i^2 = -1$.
Das werden wir gleich beim Multiplizieren von zwei komplexen Zahlen sehen. Aber alles der Reihe nach ! Erst mal addieren und subtrahieren:

Beispiel (11.3)

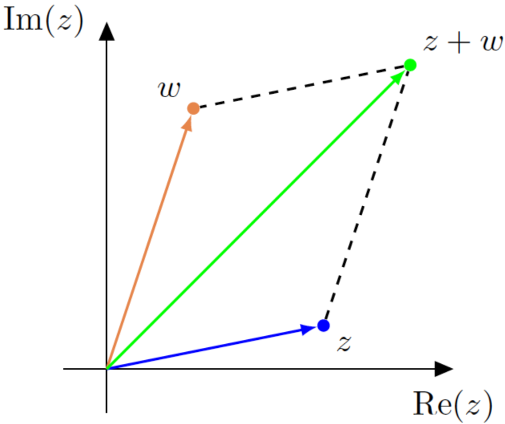
1): Addiere die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = 5 + 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4 + 2i) + (5 + 3i) \\ &= 4 + 2i + 5 + 3i \\ &= \underbrace{4 + 5}_{Re(z_1)+Re(z_2)} + \underbrace{(2 + 3)}_{Im(z_1)+Im(z_2)} i \\ &= 9 + 5i \end{aligned}$$

Wir sehen also: Die **Realteile** und **Imaginärteile** der beiden komplexen Zahlen werden einfach addiert ... fertig !

11.2 - Rechnen mit komplexen Zahlen

Wie sieht Addieren in der Gauß'schen Zahlenebene aus?



Beispiel (11.3)

2): Subtrahiere die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 7 + 5i$ und $z_2 = 2 + 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (7+5i) - (2+3i) \\ &= 7 + 5i - 2 - 3i \\ &= \underbrace{7-2}_{Re(z_1)-Re(z_2)} + \underbrace{(5-3)}_{Im(z_1)-Im(z_2)} \cdot i \\ &= 5 + 2i \end{aligned}$$

Wir sehen also: Die **Realteile** und **Imaginärteile** der beiden komplexen Zahlen werden einfach subtrahiert ... fertig !

Beispiele:

$$z_1 = 5 + 7i \qquad z_2 = -2 + 3i \qquad z_3 = 2 - 7i \qquad z_4 = 3 - i$$

Berechne: $z_1 + z_2 =$? Antwort: $z_1 + z_2 = 5 + 7i + (-2 + 3i) = 3 + 10i$
Berechne: $z_1 - z_2 =$? Antwort: $z_1 - z_2 = 5 + 7i - (-2 + 3i) = 7 + 4i$
Berechne: $z_3 + z_4 =$? Antwort: $z_3 + z_4 = 2 - 7i + (3 - i) = 5 - 8i$
Berechne: $z_3 - z_4 =$? Antwort: $z_3 - z_4 = 2 - 7i - (3 - i) = -1 - 6i$

Beispiel (11.3)

3): Multipliziere die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 2i$ und $z_2 = 5 + 3i$:

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 2i) \cdot (5 + 3i) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3i + 2i \cdot 5 + 2i \cdot 3i =$$

$$= 20 + 12i + 10i + 6i^2 = 20 + 22i + 6 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1} = 20 + 22i - 6 = 14 + 22i$$

Wir sehen also:
Wir rechnen wie im Reellen... das i wird wie eine Variable behandelt ... nur $i^2 = -1$ wird stets verwendet... fertig !

11.2 - Rechnen mit komplexen Zahlen

Bevor wir nun die Division komplexer Zahlen besprechen, sehen wir uns noch eine Besonderheit an:

$$(2+3i)\cdot(2-3i) = 4-6i+6i-9i^2 = 4-9\cdot(-1) = 13$$

Hoppla... da ist ja jetzt gar kein i mehr im Ergebnis? !!!

Woran lag das jetzt? Wir erinnern uns an die dritte Binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Also hier im Beispiel:

$$(2+3i)\cdot(2-3i) = 2^2-(3i)^2 = 4-9i^2 = 13$$

Das Multiplizieren mit (fast) derselben Zahl (Imaginärteil bekam ein zusätzliches Minus) ergibt also eine **reelle Zahl**.

Das merken wir uns !

Beispiel (11.3)

4): Dividiere die komplexe Zahl $z_2 = 5 + 3i$ durch die komplexe Zahl $z_1 = 4 + 2i$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5+3i}{4+2i} = ?$$

Uns stört, dass im Nenner eine komplexe Zahl steht !
Wie kriegen wir die in eine reelle Zahl umgewandelt ?
Wir erweitern den Bruch mit $(4 - 2i)$:

$$\frac{5+3i}{4+2i} = \frac{5+3i}{4+2i} \cdot \frac{4-2i}{4-2i} = \frac{(5+3i)(4-2i)}{16-8i+8i-4i^2} = \frac{20-10i+12i-6i^2}{16-4\cdot(-1)}$$

$$= \frac{20+2i-(6\cdot(-1))}{20} = \frac{20+2i+6}{20} = \frac{26}{20} + \frac{2}{20}i = \frac{13}{10} + \frac{1}{10}i$$

Wir sehen also: Bei der Division erweitern wir stets mit einer bestimmten Zahl... (fast) dieselbe wie im Nenner... nur ein zusätzliches Minus beim Imaginärteil... diese besondere Zahl bekommt nun einen eigenen Namen: die **Konjugiert Komplexe**.

Definition (11.4)

Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir die **komplex konjugierte Zahl**

$$\boxed{\overline{z} := \overline{x + iy} = x - iy \in \mathbb{C}}$$

Beispiele: Bestimme jeweils die komplex konjugierte Zahl zu:

$$z_1 = 5 + 7i \qquad z_2 = -2 + 3i \qquad z_3 = 3 - i$$

Antwort:

$$\overline{z_1} = \overline{5 + 7i} = 5 - 7i \qquad \overline{z_2} = \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i \qquad \overline{z_3} = \overline{3 - i} = 3 + i$$

Übrigens: Graphisch (in der Gauß'schen Zahlenebene) lässt sich diese komplexe Konjugation als Spiegelung an der Realteil-Achse interpretieren.

11.3 - Beträge in $\mathbb{C}$

Wir beginnen mit einer Frage:

$$\text{Welche Zahl ist größer: } z_1 = 5 + 3i \text{ oder } z_2 = 4 + 2i?$$

Die Frage macht keinen Sinn, denn in $\mathbb{C}$ existiert **keine Ordnung**, wie wir es aus $\mathbb{R}$ gewohnt sind. In $\mathbb{R}$ gilt nämlich stets für zwei Zahlen a, b:

$$a < b,\ a = b \text{ oder } a > b.$$

Größer bedeutet in $\mathbb{R}$ „weiter rechts" auf dem Zahlenstrahl, kleiner bedeutet „weiter links".

Wenn wir uns an die Darstellung der komplexen Zahlen erinnern (**Gauß'sche Zahlenebene**) wird auch klar, warum das in $\mathbb{C}$ nicht klappt.

Man kann komplexe Zahlen aber nach ihrem Abstand zum Nullpunkt (also $0 + 0 \cdot i$) vergleichen.

Frage: Wie berechnet man den Abstand einer komplexen Zahl zum Nullpunkt, also zum Ursprung des Koordinatensystems?

Antwort: Dazu brauchen wir den **Betrag** im Komplexen !

Definition (11.5)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ wird der **(komplexe) Betrag** von z definiert als:

$$\boxed{|z| := \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Das kann man auch etwas anders schreiben, denn wir wissen ja:

$$x = \text{Re}(z) \text{ und } y = \text{Im}(z), \text{ also: } \quad \boxed{|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}}$$

Beispiele: Berechne jeweils den Betrag von $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 5 - 3i$:

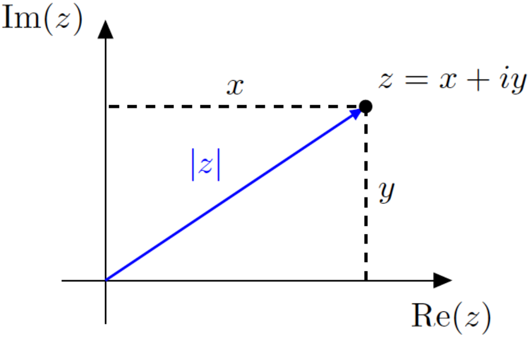
$$|z_1| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5,$$

wir sehen also: Der Abstand von z_1 zum Nullpunkt ist genau 5.

$$|z_2| = |5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34},$$

also ist der Abstand von z_2 zum Nullpunkt genau $\sqrt{34}$, also ungefähr $5,83$.

Es folgt: z_2 ist **betragsmäßig größer** als z_1.


Im(z)
x
z = x + iy
|z|
y
Re(z)

So... wir können jetzt also die vier Grundrechenarten bei komplexen Zahlen... und wissen, was der komplexe Betrag ist.

Aber was ist mit Potenzen, Wurzeln, komplexen Betrags(un)gleichungen, etc. ?

Das sehen wir uns später in HöMa I in Ruhe an !

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !