technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 12

Rechenregeln zur Differentialrechnung

12.1 - Ableitungsregeln

Wir wollen heute die in der Schule verwendeten Ableitungsregeln wiederholen.

Später in der HöMa II werden wir uns dann auch genauer ansehen, was differenzierbar eigentlich genau bedeutet (auch im Mehrdimensionalen), wenn wir uns dann auch die nötigen Grundlagen zu Grenzwerten und Stetigkeit erarbeitet haben. Wir setzen also einfach immer voraus, die behandelten Funktionen wären formal diferenzierbar.

Welche Ableitungsregeln kennt Ihr noch aus der Schule?

Hinweis: Wir werden hier nicht weiter auf die zu beachtenden Formalitäten eingehen (wie z.B. ist die Funkton überhaupt diff'bar?), sondern uns für den Moment auf die reinen Rechenregeln beschränken.

Wir behandeln heute die folgenden Regeln:

- Summenregel
- Produktregel
- Quotientenregel
- Kettenregel

12.1 - Ableitungsregeln

Starten wir mal ganz einfach... mit einem **Monom**:

Ein Monom, also z.B. x^3, wird abgeleitet, indem man mit dem "ursprünglichen" Exponenten multipliziert, und dann den Exponenten um eins erniedrigt, hier also

$$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$$

Machen wir noch ein Beispiel mit negativem Exponenten:

$$(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Allgemein gilt:

Bemerkung (12.1)

Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Hinweis: Das kann man natürlich auch für Exponenten $n \in \mathbb{Q}$, ... erweitern, aber wir belassen es hier erstmal dabei.

12.1 - Ableitungsregeln

Als nächstes betrachten wir ein sehr einfaches Polynom, also eine Summe von Monomen, aber noch ohne Koeffizienten (außer der 1). Tatsächlich nutzt man hier dann die sogenannte **Summenregel**, welche einfach nur besagt, dass man Summen gliedweise differenzieren/ableiten darf:

Beispiel (12.2)

$$(x^3 + x^2)' = ?$$

”Nacheinander” abgeleitet ergibt sich also:

$$(x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$$

Wir können die Summe von Funktionen also einfach summandenweise ableiten. Allgemein lautet die Summenregel:

Satz (12.3, Summenregel)

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Als nächstes erinnern wir uns daran, wie man mit einem konstanten Faktor vor einer abzuleitenden Funktion umgeht.

Beispiel (12.4)

Nehmen wir z.B.

$$(4 \cdot x^3)' = ?$$

Wie man x^3 ableitet, wissen wir. Der konstante Faktor 4 wird einfach mitgezogen und es ergibt sich:

$$(4 \cdot x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$$

Allgemein sieht das so aus... in der Schule nanntet Ihr das die **Faktorregel**:

Bemerkung (12.5)

Für eine Funktion $f(x)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)}$$

Nun können wir also Polynome ableiten. Das üben wir nochmal kurz.
Gesucht sind die Ableitungen von:

1. $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$
2. $f_2(x) = 2x^{13} + 3x^4 - 3x^2 + 14x$
3. $f_3(x) = 5x^{-2} + 3x$

Lösungen:

1. $f_1'(x) = -2x + 4$
2. $f_2'(x) = 26x^{12} + 12x^3 - 6x + 14$
3. $f_3'(x) = \frac{-10}{x^3} + 3$

Satz (12.6, Produktregel)

Für das Produkt aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Und als etwas übersichtlichere Merkregel ohne Argumente (also ohne x):

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Beispiel (12.7)

$$(2x^2 \cdot 4x^3)' = ?$$

Wir könnten das einfach ausmultiplizieren und dann ableiten, aber wir wollen ja die Produktregel üben:

$$(\underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{4x^3}_{g})' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{4x^3}_{g} + \underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{12x^2}_{g'} = 16x^4 + 24x^4 = 40x^4$$

12.2 - Produktregel

Sinnvoller ist die Produktregel z.B. bei folgenden Typen von Ableitungen:

$$(2x^2 \cdot \sin(x))' = ?$$

Hier kann man auch nicht mehr einfach ausmultiplizieren. Also wenden wir die Produktregel an:

$$(\underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g})' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} + \underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} = 2x \cdot (2\sin(x) + x \cdot \cos(x))$$

Satz (12.8)

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Auch hier nochmals die übersichtlichere Merkregel ohne Argumente (also ohne x):

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

Beispiel (12.9)

Betrachten wir die Ableitung des Quotienten der zwei Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2x^2 - 8$, wobei wir $\{-2, 2\}$, also die Nullstellen von $g(x)$, ausschließen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{x^3}{2x^2-8}\right)' = \frac{\overbrace{(3x^2)}^{f'} \cdot \overbrace{(2x^2-8)}^{g} - \overbrace{(\ x^3\ )}^{f} \cdot \overbrace{(4x^1)}^{g'}}{\underbrace{(2x^2-8)^2}_{g^2}} =$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{(2x^2-8)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{(2x^2-8)^2}$$

12.4 - Kettenregel

Die **Kettenregel** liefert die Möglichkeit, die Ableitung von Verkettungen zweier Funktionen zu berechnen. Was Verkettungen von Funktionen sind haben wir bisher im Vorkurs NICHT betrachtet.
Machen wir das mal hier:

Was ist also eine VERKETTUNG von Funktionen?
Wir sehen uns mal ein Beispiel an:

$$f(x) = \sin(2x + 3)$$

f ist eine verkettete Funktion, bestehend aus der **Hintereinanderausführung** der Funktionen $f_1 : x \longmapsto 2x + 3$ und $f_2 : x \longmapsto \sin x$.
Genauer: $f : x \overset{f_1}{\longmapsto} 2x + 3 \overset{f_2}{\longmapsto} \sin(2x + 3)$

Mathematisch:

$f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ (der "Kringel"/ das Verkettungssymbol wird gelesen als "nach")

Achtung: f_1 wird ja zuerst angewendet... steht aber rechts. Das ist auch richtig, denn hier wird quasi von rechts nach links abgearbeitet... erst das, was nahe am x steht und dann weiter.

Hinweis: Bei einer “verketteten” Funktion ($f(g(x))$ muss natürlich gelten, dass der Wertebereich von g (welche ja zuerst ausgeführt wird) im Definitionsbereich von f enthalten sein muss, sprich: Man muss die beiden Funktionen auch tatsächlich hintereinander ausführen können !

Nun aber zur Kettenregel:

Satz (12.10)

Für die Verkettung von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\boxed{(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Manche von Euch werden sich vielleicht noch an den Ausspruch „**Äußere mal innere Ableitung**” erinnern... das ist eine gute Merkregel !

Hier in dem Falle wäre dann $f'(g(x))$ die äußere Ableitung und $g'(x)$ die innere Ableitung.

Beispiel (12.11)

Berechnen wir mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $(\sin(x)+1)^3$:

$$\left((\sin(x)+1)^3\right)' = \underbrace{3\cdot(\sin(x)+1)^2}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

Mehr Beispiele:

$$(e^{-3x})' = e^{-3x}\cdot(-3) = -3e^{-3x}$$

$$(\sin(\cos(x)))' = \cos(\cos(x))\cdot(-\sin(x)) = -\sin(x)\cdot\cos(\cos(x))$$

Gemischtes Beispiel (Produkt- <u>und</u> Kettenregel):

$$(x^2e^{2x})' = 2x\cdot e^{2x} + x^2\cdot e^{2x}\cdot 2 = 2x\cdot e^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !