Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 13

Rechenregeln zur Integralrechnung

So... heute werden wir uns die von Euch in der Schule gemachten Integrationsregeln ansehen und ggf. ein wenig ergänzen.

Wir besprechen heute - neben den einfacheren Sachen genauer die folgenden Regeln:

- Summenregel
- Partielle Integration
- Integration durch Substitution

Ich bin mir nicht sicher, ob viele von Euch die Integration durch Substitution in der Schule gemacht haben... aber das kriegen wir schon hin.

In HöMa II werden wir dann dieselbe Regel mal andersherum lesen und auf einmal eine neue, nicht ganz so offensichtliche Methode herausbekommen, die es uns ermöglicht, Integrale zu lösen, die wir vorher nicht hinbekommen haben.

Starten wir mal mit folgender Situation: Wir haben die Funktion $f(x) = x^3$, welche die Ableitung einer unbekannten Funktion sein soll. Wie wird die ursprüngliche Funktion ausgesehen haben?

Beispiel (13.1)

Gesucht wird also die Funktion F mit

$$F'(x) = x^3 \qquad (= f(x))$$

Wir wissen, was bei der Differentialrechnung passiert:
Um NACH der Ableitung auf x^3 zu kommen, muss der Exponent vorher um 1 höher gewesen sein, also der Exponent war 4.
$F(x) = x^4$ passt aber nicht, denn dann hätten wir ja als Ableitung $4x^3$. Denn beim Ableiten wird ja der "alte" Exponent als Faktor davor geschrieben. Da bei x^3 kein Faktor ist (bzw. der Faktor ist gleich 1), so muss dieser Faktor 4 durch einen "neutralisierenden" Faktor der Ursprungsfunktion ausgeglichen worden sein, sprich:

$$\text{“Alter Faktor“} \quad \cdot \quad \text{“neuer Faktor“} \quad = \quad 1$$

Also bekommen wir heraus: $\qquad F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

Beispiel (13.1)

Also bekommen wir heraus: $$F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$$

Wir prüfen nach:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4} \cdot x^4\right)' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^3 = x^3$$

Passt also ! Fertig? NEIN ! Denn wir bekommen noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft heraus, z.B.

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + 2$$

Denn beim Ableiten wird ja aus der 2 hinten eine Null und es kommt wieder x^3 heraus.

Also: Die korrekte Angabe **aller** Lösungen unserer Aufgabe wäre:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

13.1 - Integrationsregeln

Was wir jetzt gerade gesucht haben für die Funktion $f(x)$ waren eine bzw. besser ALLE **Stammfunktionen**, also alle Funktionen, die abgeleitet genau die Funktion $f(x)$ ergeben. Also eben:

$$F'(x) = f(x)$$

Was unterscheidet also dann ALLE Stammfunktionen? Nur ein konstanter Summand, denn der fällt beim Differenzieren weg.

Das ist der Grund, warum wir beim unbestimmten Integral immer noch ein $+c$, $c \in \mathbb{R}$ hinter das gelöste Integral schreiben.

Klar?

Vereinbarung: Wir machen das hier immer erst ganz am Schluss... einfach der Übersicht halber. Bedenkt aber, dass man das eigentlich immer sofort hinschreiben müsste, sobald man das Integral auflöst !

Allgemein halten wir fest:

Bemerkung (13.2)

Für $n \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}}$$

Beispiel (13.3)

$$\int \sqrt{x}\, dx = ?$$

Wir wissen:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{ also mit (13.2) :}$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx \overset{n=\frac{1}{2}}{=} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1}\right] = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Wie verfahren wir bei Summen?

Bemerkung (13.4, Summenregel)

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

Analog zur Differentialrechnung dürfen wir also auch summandenweise integrieren.

Wie verfahren wir mit konstanten Faktoren?

Satz (13.5)

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx}$$

Wir können also konstante Faktoren vor das Integral ziehen, d.h. diese werden einfach weiter als Faktoren betrachtet ... fertig.

Die Ergebnisse können wir nun nutzen, um z.B. Polynome zu integrieren:

Beispiel (13.6)

$$\begin{aligned}
\int (3x^3 + 2x - 4)\,dx &\overset{(13.4)}{=} \int 3x^3\,dx + \int 2x\,dx - \int 4\,dx \\
&\overset{(13.5)}{=} 3 \cdot \int x^3\,dx + 2 \cdot \int x\,dx - 4 \cdot \int 1\,dx \\
&= 3 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

13.2 - Partielle Integration

Die Partielle Integration leitet sich ganz einfach aus der Produktregel der Differentialrechnung her:

Bemerkung (13.7)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\iff \quad f(x) \cdot g(x) = \int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right)\, dx$$

$$\iff \quad f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\iff \quad \int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Hinweis: Im ersten Schritt haben wir übrigens auf beiden Seiten integriert ! Denn Integrieren und Ableiten sind quasi die Umkehrung voneinander...
Dann noch die Integrale mit der Summenregel auseinander gezogen und dann nur noch umgestellt... fertig.

Satz (13.8, Partielle Integration)

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx}$$

Beispiel (13.9)

$$\int \cos(x) \cdot x\, dx = ?$$

$$\int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\, dx = \left[\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\right] - \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\, dx = [\sin(x) \cdot x] - \int \sin(x)\, dx =$$

$$= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Bemerkung (13.10)

Anfängern hilft es sehr, sich einfach mal alle benötigten Formel-Elemente einzeln hinzuschreiben, bevor man einsetzt:
Also hier:

$$\begin{array}{ll} f' = \cos(x) & f = \sin(x) \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

Und dann einfach in die Formel einsetzen ... fertig !

Hinweis: Bei der Aufgabenstellung steht natürlich nie dabei, welche der beiden Funktionen als f' (also die später zu integrierende Funktion), und welche als g (also die später abzuleitende Funktion) zu wählen ist. Prinzipiell wählt man f' so, dass es beim Integrieren NICHT „schwieriger" wird und g so, dass dieses durch Ableiten vereinfacht wird. Wie oben gesehen, sind Polynome meist eine gute Wahl für g.

Das Analogon zur Kettenregel der Differentialrechnung ist die **Integration durch Substitution**. Mit ihr können wir verkettete Funktionen (siehe Kapitel 12, Kettenregel) integrieren:

Satz (13.11, Integration durch Substitution)

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt}$$

Wir sehen (lies von links nach rechts!):

Die "innere Funktion" $g(x)$ ist ersetzt worden durch t,
dx ist zu dt geworden.
Der $g'(x)$-Teil ist ganz verschwunden.

Wieso das so ist, schauen wir uns an einem Beispiel an:

Beispiel (13.12)

$$\int \sin(2x)dx = ?$$

Die innere Funktion substituieren wir zu t, also $t := 2x$. Damit gilt:

$$t = 2x \iff t' = \frac{dt}{dx} = 2 \iff dx = \frac{dt}{2}$$

Setzen wir nun beides (also t und dx) oben ein, so erhalten wir:

$$\int \sin(2x)\,dx \stackrel{t=2x}{=} \int \sin(t)\,\frac{dt}{2} = \int \frac{1}{2}\sin(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt$$

Da $\cos'(x) = -\sin(x)$ gilt, ist also $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

Damit gilt für unser Integral

$$\frac{1}{2}\int \sin(t)dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel (13.12)

In unserer Funktion steht jetzt noch t, gesucht war aber eine Stammfunktion in Abhängigkeit von x. Da wir zu Beginn substituiert haben, müssen wir jetzt noch **rücksubstitutieren**:

$$-\frac{1}{2}\cos(t)+c \overset{t=2x}{=} -\frac{1}{2}\cos(2x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Damit erhalten wir also insgesamt als Lösung:

$$\int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Schritte, die wir bei der Integration durch Substitution durchlaufen:

- Bestimme die ”innere Funktion” $g(x)$ und substituiere $g(x)=t$,
- Bilde $g'(x)$, setze $g'(x)=\frac{dt}{dx}$ und stelle um nach dx,
- Alles einsetzen und dann das Integral berechnen,
- Rücksubstitution.

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !