technische universität dortmund

fakultät für mathematik

# Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

## Kapitel 15

Sinus, Cosinus, Exponentialfunktion und Logarithmus

# 15.1 - Sinus und Cosinus

Wir sprechen heute über Sinus und Cosinus... Ihr habt das alle in der Mittelstufe in der Schule gemacht... aber vermutlich nicht über den folgenden Ansatz.

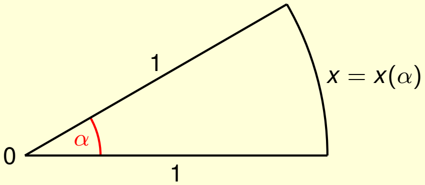
Dazu müssen wir auch ein wenig über Winkel reden.

Hier messen wir Winkel zumeist nicht im Gradmaß, sondern im Bogenmaß.
Beispiel:

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi$$

## Definition (15.1)

Schauen wir uns mal den Begriff **Bogenmaß** am Einheitskreis an, also einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.




Wir nennen die Länge des Weges auf dem Kreisrand mal $x$ $(= x(\alpha))$. Wie man sieht, ist also $x$ abhängig von $\alpha$. Dieses $x(\alpha)$ ist unser **Bogenmaß des Winkels $\boldsymbol{\alpha}$**.
Weiter gilt:

$$\frac{x(\alpha)}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \iff x(\alpha) = \frac{2\pi\,\alpha}{360^\circ} \iff \alpha = \frac{360^\circ \cdot x(\alpha)}{2\pi}$$

Also lassen sich Winkel auf zwei verschiedene Arten darstellen:

- Winkel können in Grad angegeben werden, also beispielsweise:

$$15^\circ \qquad 45^\circ \qquad 180^\circ \qquad 360^\circ$$

  Eine volle Umdrehung entspricht $360^\circ$.

- Winkel können aber auch im Bogenmaß angegeben werden, wie beispielsweise:

$$\frac{1}{12}\pi \qquad \frac{1}{4}\pi \qquad \pi \qquad 2\pi$$

  Eine volle Umdrehung entspricht also $2\pi$.

Es gilt hier also:

$$2\pi \mathrel{\widehat{=}} 360^\circ$$

Mit der Formel aus Definition (15.1) können wir Grad in Bogenmaß umwandeln und anders herum.

## Beispiel (15.2)

**Aufgabe:** Gib die angegebenen Gradzahlen im Bogenmaß an:

1) $60^\circ$ : Es gilt:

$$x(60^\circ) = \frac{2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

2) $180^\circ$ : Es gilt:

$$x(180^\circ) = \frac{2\pi \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

## Beispiel (15.3)

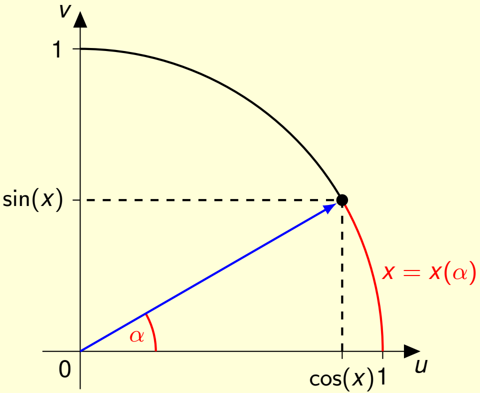
**Aufgabe:** Gib das angegebene Bogenmaß in Grad an: $\frac{2}{3}\pi$ :

Es gilt:

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot x(\alpha)}{2\pi} = \frac{360^\circ \cdot \frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

## Definition (15.4)

Warum haben wir das Bogenmaß $x$ genannt? Damit lassen sich nun interessante Sachen machen: Wir können jetzt ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ auch am Einheitskreis einzeichnen... nämlich als Länge des Kreisbogens $x(\alpha)$.



## Definition (15.4)

Dabei gehen wir $\left\{\begin{array}{ll} \text{gegen den Uhrzeigersinn} & \text{für } x \geq 0 \\ \text{im Uhrzeigersinn} & \text{für } x < 0 \end{array}\right\}$

In dem Bild wandern wir also $x$ auf dem Kreisbogen und erhalten dort einen Punkt $(u(x), v(x))$. Der sich dadurch ergebende Winkel ist dann natürlich unser $\alpha$.

## Definition (15.5)

Damit können wir nun zwei Funktionen definieren:

$$\boxed{u(x) = \cos x, \qquad v(x) = \sin x}$$

Dadurch haben wir nun - quasi ohne es zu merken - neue Funktionen definiert: **Sinus** bzw. **Cosinus**.

Die hierdurch definierten Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ und $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ heißen **Cosinus-** bzw. **Sinusfunktion**.

Sie gehören zu den sogenannten **trigonometrischen Funktionen**.

Sehen wir uns das mal genauer an:

Für jedes $x$, welches wir auf dem Kreisbogen mit Radius 1 zeichnen, besitzen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ einen Wert. Wenn wir das für JEDES $x$ machen, dann erhalten wir also die Graphen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

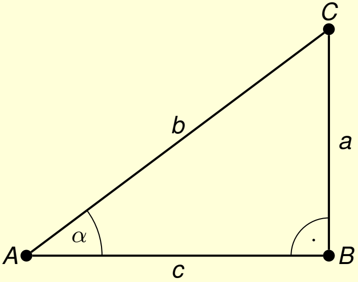
## 15.1 - Sinus und Cosinus



Link zur Animation

Wir betrachten mal das Dreieck aus der Definition (15.4) genauer:

## Bemerkung (15.6)




$$\sin(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{c}{b}$$

In unserer Zeichnung von eben hatte der Kreis einen Radius von 1. Setzt man hier also den Radius $b = 1$, dann kommen wir zu dem speziellen Fall von oben. Beachte: $\alpha$ kann hier entweder als Bogenmaß oder in Grad angegeben werden.

Nun versuchen wir einmal gemeinsam eine wichtige Gleichung anhand des rechtwinkligen Dreiecks (wobei $b = 1$ ist) herauszufinden.

## Bemerkung (15.7)

Aus der Schule kennt man noch den Satz des Pythagoras:
In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei $a$ und $b$ die Katheten waren und $c$ die Hypothenuse.

In dem vorhin gezeigten Dreieck waren die Bezeichnungen etwas anders:
Die Ankathete war $c$, die Gegenkathete war $a$ und die Hypothenuse $b$.
Also lautet für unseren Fall der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + c^2 = b^2$$

Nutzen wir noch, dass bei uns ja der Radius 1 war, also $b = 1$, dann erhält man:

$$a^2 + c^2 = 1 \Longleftrightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Diese Gleichung nennt man auch den **Trigonometrischen Satz des Pythagoras**.

Einige wichtige Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

### Korollar (15.8)

Aus obiger Definition folgt unmittelbar:

1) Cosinus- und Sinusfunktion sind $2\pi$-**periodisch**, d.h. es gilt

$$\boxed{\cos(x+2\,k\,\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\,k\,\pi) = \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{Z}.}$$

(Nach einer vollen Umdrehung, also nach $2\pi$, sind wir wieder am selben Punkt!)

2) $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \cos(-x) = \cos x}$, d.h. $\cos$ ist eine **gerade** Funktion

3) $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \sin(-x) = -\sin x}$, d.h. $\sin$ ist eine **ungerade** Funktion

4) $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

## Korollar (15.8)

5) $\boxed{|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq |x|}$

6) Wann werden Sinus bzw. Cosinus gleich Null? Es gilt:

(a) $\cos x = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots\right\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

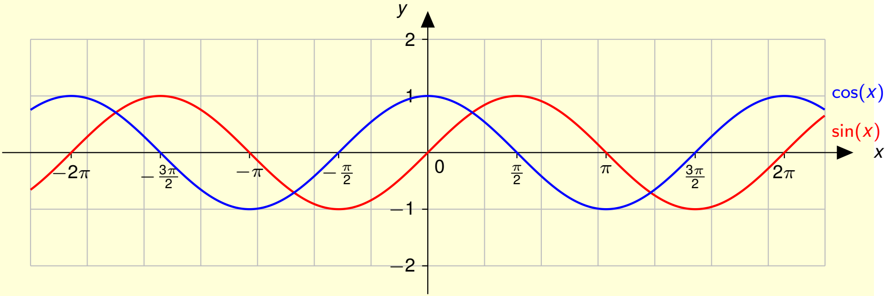
(b) $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

7) Spezielle Werte von Sinus und Cosinus lauten:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6} \hat{=} 30°$ | $\frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$ | $\frac{\pi}{3} \hat{=} 60°$ | $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

## Korollar (15.8)

8) Graphen (geht immer so weiter... nach links und nach rechts):




Auch hier kann man viele Eigenschaften sofort ablesen !

## Korollar (15.8)

9) Sinus- und Cosinusfunktion sind **abschnittsweise** streng monoton:

Die Sinusfunktion ist streng monoton wachsend zum Beispiel auf $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und streng monoton fallend zum Beispiel auf $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Die Cosinusfunktion ist streng monoton wachsend z.B. auf $[-\pi; 0]$ und $[\pi; 2\pi]$ und streng monoton fallend z.B. auf $[0; \pi]$ und $[2\pi; 3\pi]$

**Achtung:** Da die beiden Funktion ja $2\pi$-periodisch sind, wiederholen sich diese Bereiche für Verschiebungen um Vielfache von $2\pi$ !

Versucht einmal, allgemein anzugeben, in welchen Bereichen z.B. die Sinusfunktion (oder die Cosinusfunktion) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) ist/sind...

## 15.2 - Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Kommen wir nun zu **Exponentialfunktion** und **natürlichem Logarithmus**, wo wir uns ja schon in Kapitel 5 schon ein paar Regeln zum Rechnen mit $e^x$ und $\ln x$ angesehen haben:

### Korollar (Additionstheoreme der *e*-Funktion)

Es gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Additionstheoreme der Exponentialfunktion :

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad \text{und} \quad \left(e^x\right)^y = e^{xy}$$

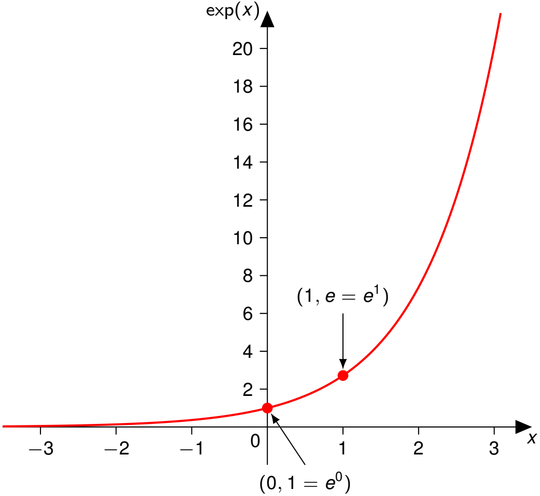
### Korollar (Funktionalgleichungen des natürlichen Logarithmus)

Es gelten die Funktionalgleichungen für $x, y > 0$:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{sowie} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Sehen wir uns die beiden Funktionen (und was diese miteinander zu tun haben) mal etwas genauer an:

## 15.2 - Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus




Für große $x$ wird die $e$-Funktion auch immer größer und für kleine $x$ nähert sich der Funktionsgraph der $x$-Achse an, schneidet sie allerdings nie!

Einige wichtigen Eigenschaften der Exponentialfunktion:

### Korollar (15.9)

1) Es gilt $\exp(0) = 1$ sowie $\exp(1) = e$
2) Aus den Rechenregeln folgt sofort für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \quad \text{und} \quad \exp(x) \neq 0$$

3) $\exp$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.
4) $\exp$ ist bijektiv auf $\mathbb{R}$ und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

**Hinweis:** Wie bei den Additionstheoremen schreiben wir oft auch einfach $e^x$ für $\exp(x)$.

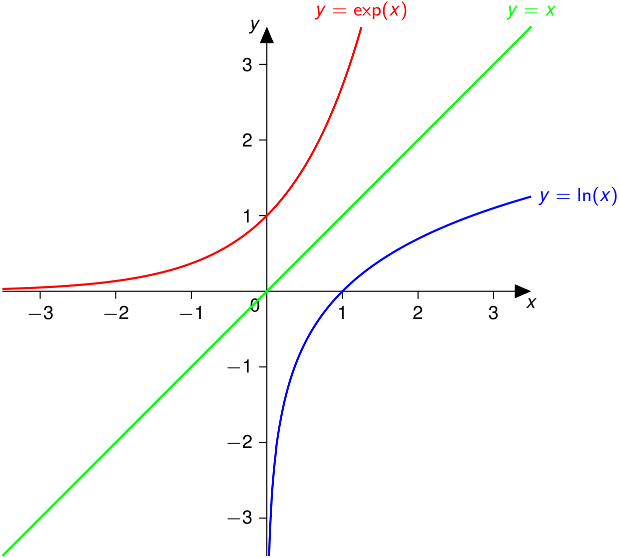
### Bemerkung

Die Exponentialfunktion kann man auch noch verallgemeinern, sodass sie nicht $e$, sondern $a \in \mathbb{R}_{>0}$ zur Basis hat. Dies werden wir hier nicht weiter besprechen.

Als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ erhalten wir durch Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden für $x > 0$ den nur ganz langsam ansteigenden **natürlichen Logarithmus** $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Sehen wir uns das mal in Ruhe an...

# 15.2 - Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus



Einige Eigenschaften des natürlichen Logarithmus lauten:

### Korollar (15.10)

1) Es gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
2) Mit Hilfe der $e$-Funktion folgt:

$$\ln(x) < 0 \;\text{ für }\; 0 < x < 1 \quad \text{sowie} \quad \ln(x) > 0 \;\text{ für }\; x > 1$$

3) $\ln$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_{>0}$.

### Bemerkung

Den natürlichen Logarithmus kann man auch noch verallgemeinern, sodass er nicht $e$ zur Basis hat. Dies werden wir hier nicht weiter besprechen.

**Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !**