Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 6

Abbildungen, Polynome, Umkehrabbildungen und Eigenschaften

Wir sprechen heute über **Abbildungen**. (Später nennen wir das auch **Funktionen**)

Man betrachtet zwei Mengen (**Definitionsbereich** bzw. **Wertebereich**) mit Elementen sowie eine **Abbildungsvorschrift**. Den Elementen aus dem Definitionsbereich werden durch die Abbildungsvorschrift dann Elemente aus dem Wertebereich zugeordnet.

Wichtig hierbei (und das ist auch die zentrale Eigenschaft einer Abbildung):

> Jedes Element aus dem Definitionsbereich wird jeweils auf **genau ein** Element aus dem Wertebereich abgebildet !

Oder wie Ihr das in der Schule gelernt habt:

Jedem x wird genau ein y zugeordnet.
Und wenn die Abbildung jetzt z.B. f heißt, so gilt: $y = f(x)$.

Also heißt das dann bei uns: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.

Wenn man das verstanden hat... dann ist schon viel gewonnen.

Anschließend kann man dann Wertetabellen aufstellen (d.h. man setzt bestimmte x-Werte in die Abbildungsvorschrift ein und notiert dann die herauskommenden $(f(x))$-Werte), Graphen zeichnen, Nullstellen berechnen, Eigenschaften nachprüfen bis hin zu Umkehrabbildungen konstruieren (falls möglich).

Sehen wir uns einfach mal eine Abbildung als Beispiel an:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) = x^2$$

Unser Definitionsbereich ist also $D_f = \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{\geq 0}$, der Wertebereich ist $W_f = \mathbb{R}$.
Die Abbildungsvorschrift lautet: $f(x) = x^2$.

Setzen wir mal ein paar Werte ein:
Starten wir mit $x = 2$. Dann folgt mit der Abbildungsvorschrift also: $f(2) = 2^2 = 4$.
OK, nun $x = 0$: Dann folgt $f(0) = 0^2 = 0$.
Und dann setzen wir noch $x = -2$ ein. Was kommt heraus?

OK, das war fies... denn $x = -2$ dürfen wir gar nicht einsetzen, weil $-2 \notin D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Also aufpassen ! Wir dürfen nur Elemente des Definitionsbereiches einsetzen.

Definition (6.1)

Seien D und W nicht-leere Mengen.
Eine **Abbildung** f von D nach W ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x) \in W$ zu.
Notation: $x \mapsto f(x) = y$

Man schreibt:

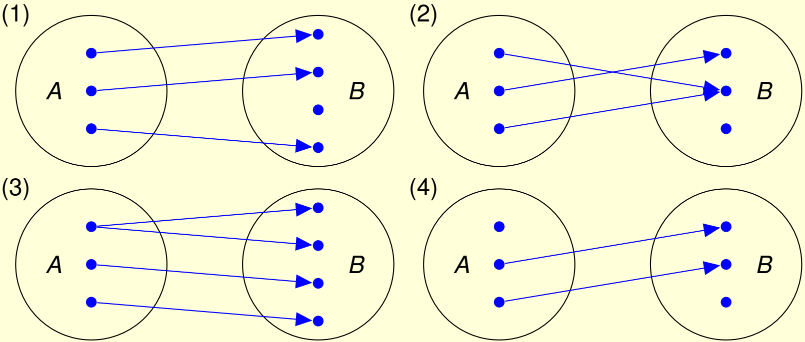
$$f : D \to W \text{ mit Abbildungsvorschrift } f(x) = y$$

D heißt **Definitionsbereich**, W heißt **Wertebereich**.

Also nochmals: Das Wichtige an einer Abbildung ist:
Jedes x wird auf ein $f(x)$ abgebildet. Nicht auf zwei, nicht auf gar keins ! EINS !

Beispiel

Welche der folgenden Beispiele (1) bis (4) sind Abbildungen von A nach B?



Also nochmals: Jedes $a \in A$ wird auf ein $b \in B$ "abgebildet" !
Sonst KEINE Abbildung !

Weiter mit der schon begonnenen Definition:

Definition (6.1)

Wir betrachten die Abbildung $f : D \to W$ mit $x \mapsto f(x) = y$.

$y = f(x)$ heißt das **Bild** von x (bzw. der **Funktionswert von** x) unter f.

Statt Abbildung verwenden wir auch den Begriff **Funktion**, vor allem wenn f in die reellen Zahlen oder komplexen Zahlen abbildet.

Die Elemente aus dem Wertebereich W, die wirklich getroffen werden mit f, nennen wir das **Bild** von f:

$$\boxed{\text{Bild}\,(f) := f(D) := \{y \in W \mid \exists\, x \in D \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq W}$$

Tatsächlich ist der Wertebereich einer Abbildung/Funktion meist größer als das tatsächliche **Bild** der Abbildung. Das Bild ist also deutlich interessanter als der Wertebereich.

So war eben bei unserem Beispiel $f(x) = x^2$ auch $W_f = \mathbb{R}$ angegeben... das Bild(f) ist aber dann - nach etwas Überlegung - gleich $\mathbb{R}_+$

Beispiel:

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $f(x) = x^2$.

Bestimme das Bild der Abbildung f.

Antwort: $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_+$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $g(x) = x^2 + 1$.

Bestimme das Bild der Abbildung g.

Antwort: $\text{Bild}(g) = \mathbb{R}_{\geq 1}$

Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $h(x) = -x^2$.

Bestimme das Bild der Abbildung h.

Antwort: $\text{Bild}(h) = \mathbb{R}_-$

Sei $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $i(x) = -x^2 + 1$.

Bestimme das Bild der Abbildung i.

Antwort: $\text{Bild}(i) = \mathbb{R}_{\leq 1}$

6.1 - Abbildungen

Wir haben noch einen schwierig zu verstehenden Begriff: Das sogenannte **Urbild**. Hiermit ist gemeint, wenn wir ein Element y aus dem Bild(f) vorgeben: Welche $x \in D_f$ werden mit f genau auf dieses Element y abgebildet? Das können durchaus mehrere sein. Oder man gibt sich eine ganze (Teil-)Menge U aus W vor und will dann wissen: Welche $x \in D_f$ werden in diese Menge U (also genauer auf (irgend)eines der Elemente aus U) abgebildet? Das Urbild ist immer eine **Menge** !

Definition (6.2)

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung, sei $U \subseteq W$.

Das **Urbild** von U unter f ist dann – als Menge geschrieben:

$$\boxed{f^{-1}(U) := \{x \in D \,|\, f(x) \in U\} \subseteq D}$$

Das Urbild von U ist also die Menge aller Elemente von D, deren Bild (deren Funktionswerte)in U liegt, die also mit der Abbildung f auf eines der Elemente von U abgebildet werden.

Hinweis: f^{-1} ist hier nur eine Schreibweise... bitte nicht verwechseln mit der später noch zu besprechenden Umkehrfunktion f^{-1}.

Beispiel:

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $f(x) = x^2$.
Berechne das Urbild der Menge $U = \{4, 9\}$ unter der Abbildung f.
Antwort: $f^{-1}(U) = \{2, 3\}$

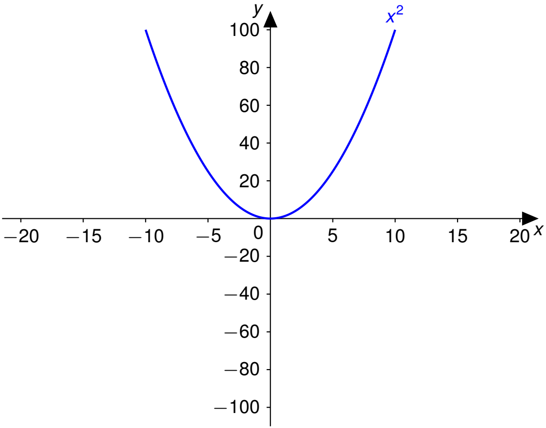
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $g(x) = x^2$.
Berechne das Urbild der Menge $U = \{4, 9\}$ unter der Abbildung g.
Antwort: $g^{-1}(U) = \{-3, -2, 2, 3\}$

Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $h(x) = x^2 + 1$.
Berechne das Urbild der Menge $U = \{5, 10, 17\}$ unter der Abbildung h.
Antwort: $h^{-1}(U) = \{2, 3, 4\}$

Sei $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildung mit $i(x) = x^2 + 1$.
Berechne das Urbild der Menge $U = \{5\}$ unter der Abbildung i.
Antwort: $i^{-1}(U) = \{-2, 2\}$

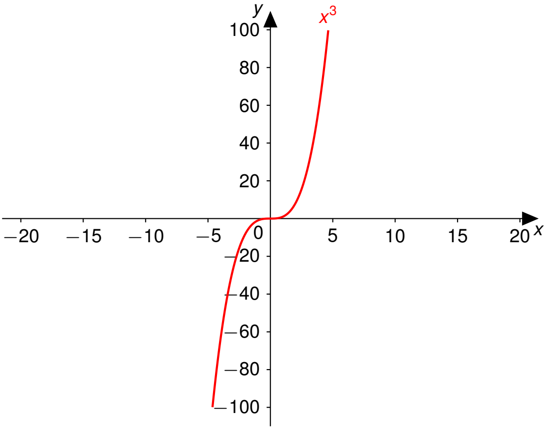
Definition (6.3)

Sei $f : D \to W$ (hier $D, W \subseteq \mathbb{R}$) eine Funktion/Abbildung.
Die Menge der Punkte $\boxed{\{(x, f(x)) \mid x \in D\}}$ bezeichnet man als den **Graph** von f.



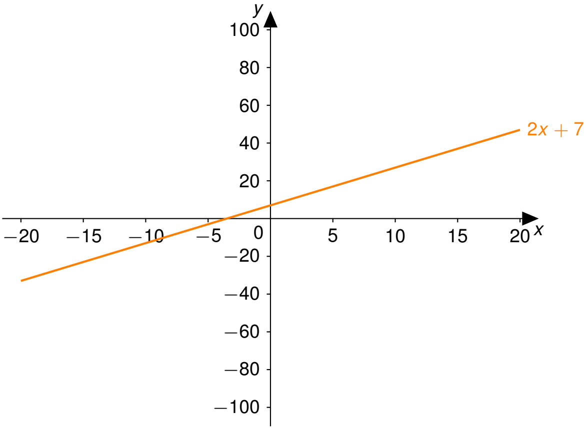
Definition (6.3)

Sei $f : D \to W$ (hier $D, W \subseteq \mathbb{R}$) eine Funktion/Abbildung.
Die Menge der Punkte $\boxed{\{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}}$ bezeichnet man als den **Graph** von f.



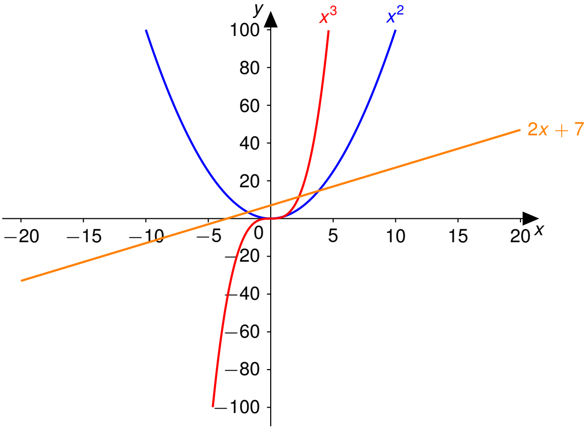
Definition (6.3)

Sei $f : D \to W$ (hier $D, W \subseteq \mathbb{R}$) eine Funktion/Abbildung.
Die Menge der Punkte $\boxed{\{(x, f(x)) \mid x \in D\}}$ bezeichnet man als den **Graph** von f.



Definition (6.3)

Sei $f : D \to W$ (hier $D, W \subseteq \mathbb{R}$) eine Funktion/Abbildung.
Die Menge der Punkte $\boxed{\{(x, f(x)) \mid x \in D\}}$ bezeichnet man als den **Graph** von f.



Frage: Wann sind zwei Abbildungen f und g gleich?
Antwort: Der Definitionsbereich von f muss gleich dem Definitionsbereich von g sein UND der Wertebereich von f muss gleich dem Wertebereich von g sein UND für **jedes** x aus dem Definitionsbereich muss gelten: $f(x) = g(x)$.

Bemerkung (6.4)

Zwei Abbildungen $f : D_1 \to W_1$ und $g : D_2 \to W_2$ sind **gleich**, genau dann, wenn gilt:

$$\boxed{D_1 = D_2, \quad W_1 = W_2 \quad \underline{\text{und}} \quad f(x) = g(x) \ \ \forall\, x \in D_1 (= D_2)}$$

Definition (6.5)

Eine besondere Abbildung ist die sogenannte **Identität**.

Bezeichnung: $\mathrm{id} : D \to D$ mit $x \mapsto \mathrm{id}(x) = x$.

Diese Abbildung bildet jedes $x \in D$ **auf sich selbst** ab, also es gilt stets:

$$\boxed{\mathrm{id}(x) = x \quad \forall\, x \in D}$$

Hinweis: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ habt Ihr schon in der Schule kennengelernt als sogenannte **Winkelhalbierende**, also die Gerade durch den Ursprung mit Steigung 1.

Polynome: Ihr habt Polynome alle schon in der Schule behandelt. Beispiele sind z.B.:

$$f(x) = 2x^3 - 7x + 2, \quad g(x) = x^9, \quad h(x) = 2, \quad p(x) = x^3 - x^5, \quad q(x) = -2x^3 + 2x$$

Hier werden also offensichtlich sogenannte **Monome**, also z.B. x^5 oder x^2 oder $x^0 = 1$ mit Zahlen malgenommen und dann noch addiert. Allgemein sieht das dann so aus:

Definition (6.6)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gegeben.
Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

nennen wir ein **Polynom vom Grad n**.

Schreibweise: $\operatorname{grad}(p) = n$
Die a_k heißen die **Koeffizienten** des Polynoms p und speziell a_n heißt der **Leitkoeffizient** von p (also der Faktor vor dem x mit dem größten Exponenten)

Beispiel

$f(x) = 2x^3 - 7x + 2$ ist ein Polynom mit $\text{grad}(f) = 3$ und dem Leitkoeffizienten 2,

$g(x) = x^9$ ist ein Polynom mit $\text{grad}(g) = 9$ und dem Leitkoeffizienten 1,

$h(x) = 2$ ist ein Polynom mit $\text{grad}(h) = 0$ und dem Leitkoeffizienten 2,

$p(x) = x^3 - x^5$ ist ein Polynom mit $\text{grad}(p) = 5$ und dem Leitkoeffizienten -1,

$q(x) = -2x^3 + 2x$ ist ein Polynom mit $\text{grad}(q) = 3$ und dem Leitkoeffizienten -2.

Definition (6.7)

Seien p und q Polynome.

Die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ heißt **rationale Funktion**.

Natürlich müssen wir hier aufpassen, dass wir nicht durch Null teilen.

Daher ist hier der Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Frage: Warum genau muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden?

Beispiel

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4x+2}{x-1}$$

ist eine rationale Funktion. Der Nenner ist nur gleich Null für $x = 1$, daher hat f den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Unser Ziel ist es, Umkehrabbildungen einzuführen. Dafür brauchen wir ein paar Eigenschaften, um beurteilen zu können, ob solch eine Umkehrabbildung für eine gegebene Funktion/Abbildung existiert.

Denn die Umkehrabbildung soll ja auch eine Abbildung sein, also mit der Eigenschaft:

Jedes x wird auf **genau ein** $f(x)$ abgebildet.

Dazu brauchen wir erstmal ein paar Definitionen:

Definition (6.8)

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt

- **injektiv** $:\Longleftrightarrow$

  Jeder Wert aus dem Wertebereich wird **höchstens einmal** getroffen.

  Es kann also nicht sein, dass nach Einsetzen **verschiedener** x-Werte **derselbe** Funktionswert $f(x)$ herauskommt.
  Kein Funktionswert kommt mehr als einmal vor...

  Es kann aber sein, dass Werte aus dem Wertebereich NICHT erreicht werden, also gar nicht als Funktionswert vorkommen.

Definition (6.8)

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt

- **surjektiv** $:\Longleftrightarrow$

  $\boxed{\text{Jeder Wert aus dem Wertebereich wird } \textbf{mindestens einmal} \text{ getroffen}}$

  Surjektivität bedeutet also: Alle Werte aus dem Wertebereich werden tatsächlich erreicht. Möglich ist hier aber, dass sie mehrfach getroffen werden.

  Hier entspricht also das Bild (f) genau dem Wertebereich von f: Es gilt also:

$$\boxed{\text{Bild}\,(f) = W}$$

Definition (6.8)

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt

- **bijektiv** $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{f \text{ ist injektiv } \underline{\text{und}} \text{ surjektiv}}$

Jeder Wert aus dem Wertebereich wird also **höchstens einmal** getroffen **UND** jeder Wert aus dem Wertebereich wird **mindestens einmal** getroffen.
Sprich:

Jeder Wert aus dem Wertebereich wird **genau** einmal getroffen !

6.2. - Eigenschaften von Abbildungen

Hinweis: Im Fall, dass $f : A \to B$ bijektiv ist, existiert immer auch die sogenannte **Umkehrabbildung**

Der Grund dafür ist (einfach erklärt):
Bijektiv heißt ja: Alle Elemente von B werden mit f erreicht und auch nie doppelt, sondern genau einmal !

D.h. wenn wir an die Pfeile denken, können wir einfach die Pfeile umdrehen und erhalten tatsächlich wieder eine Abbildung (nennen wir sie mal g), also $g : B \to A$.

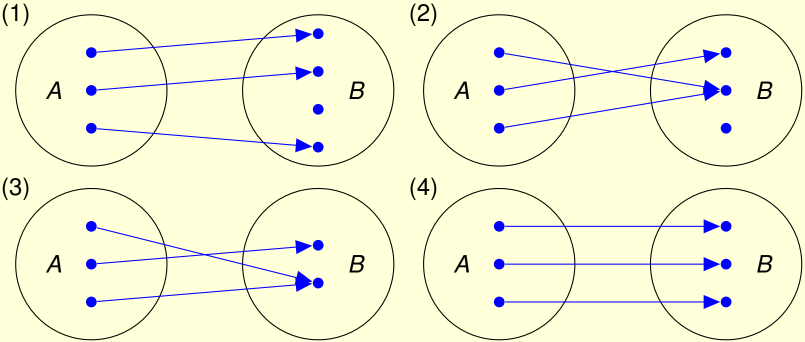
Denn für g gilt dann (eben weil f bijektiv ist) dann wieder die Abbildungseigenschaft:

<u>Jedes</u> $b \in B$ wird auf <u>genau ein</u> $a \in A$ abgebildet !

Darum sind Injektivität und Surjektivität (also Bijektivität) so wichtig für (Umkehr-)Abbildungen...

Beispiel (6.9)

Prüfe die folgenden Abbildungen (1) bis (4) auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:



Bemerkung (6.10)

Für eine Funktion $f : D \to W$ lassen sich die drei Eigenschaften auch wie folgt überprüfen:

$$f \text{ ist} \left\{ \begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{c} \text{Für jedes } y \in W \text{ hat} \\ \text{die Gleichung } f(x) = y \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{höchstens} \\ \text{mindestens} \\ \text{genau} \end{array} \right\} \text{eine Lösung.}$$

Bemerkung (6.11)

Für eine Abbildung $f : D \to W$ gilt:

$$\boxed{f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ besitzt eine Umkehrabbildung } (f^{-1} : W \to D)}$$

Hinweis: Das ist natürlich genau dann der Fall, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in W$ **genau eine** Lösung $x \in D$ hat.

Bemerkung

Sei $f : D \to W$ Abbildung. Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} von f aus dem Graphen von f, indem man diesen an der Winkelhalbierenden **spiegelt**.

Beispiel

Für $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^2$ ist $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ die Umkehrabbildung.

Frage: Warum existiert die Umkehrabbildung für $f(x) = x^2$ **nicht** für die folgenden Definitions-/Wertebereiche?

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

bzw.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$?

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !