Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 7

Gleichungen und Nullstellen

Einführung: Nehmt mal an, dass Ihr momentan 7 Euro in Eurem Sparschwein habt. Jeden Tag spart Ihr weitere 3 Euro. Und nun wollt Ihr wissen, in wieviel Tagen sich genau 31 Euro in Eurem Sparschwein befinden. Ihr wollt nämlich jemand (vielleicht Eurem Vorkurs-Dozenten?) ein schönes Geschenk machen am Schluss des Vorkurses.

Wir formulieren das Problem mathematisch mit Hilfe einer **Gleichung**:

$$7 + 3 \cdot x = 31$$

Die Variable x steht in dieser Aufgabe also für die Anzahl der Tage, nach der Ihr dann 31 Euro in dem Sparschwein habt.

Um nun etwas über die Lösbarkeit dieser Gleichung sagen zu können, sollten wir wissen, aus welchem Zahlbereich diese x sind, die wir zur Lösung der Aufgabe betrachten. Da es sich in unserem Fall um die Anzahl der Tage handelt, lassen wir nur natürliche Zahlen zu, also $x \in \mathbb{N}$.

Diese Gleichung $7 + 3 \cdot x = 31$ ist lösbar... für $x = 8$. Sie ist sogar **eindeutig lösbar**... und da wir das Beispiel clever gewählt haben, ist die Lösung sogar aus den natürlichen Zahlen. Es gibt also nur eine Zahl $x \in \mathbb{N}$, sodass die Gleichung gilt. Anders ausgedrückt: Es gibt eine eindeutige Anzahl an Tagen, nach denen sich genau 31 Euro in dem Sparschwein befinden.

Um allgemein in $\mathbb{R}$ (oder später auch in $\mathbb{C}$) solch eine Gleichung (und später auch mehrere Gleichungen, also sogenannte **Gleichungssysteme**) zu berechnen, führen wir sogenannte **Äquivalenzumformungen** durch. Wir wollen also die Gleichung vereinfachen/bearbeiten ohne die Lösung(smenge) zu verändern.

Bemerkung (7.1)

Zu den **Äquivalenzumformungen** einer Gleichung gehören

1) Addition und Subtraktion einer beliebigen Zahl auf beiden Seiten
2) Multiplikation und Division einer beliebigen Zahl $\neq 0$ auf beiden Seiten

Hinweis: Solche Umformungen verändern zwar das Aussehen der Gleichung(en), aber die Lösung(smenge) bleibt gleich!

Lösen wir die Gleichung vom Anfang einmal mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$
\begin{aligned}
7+3x &= 31 \qquad \mid -7 \\
\iff \qquad 3x &= 24 \qquad \mid :3 \\
\iff \qquad x &= \frac{24}{3} = 8
\end{aligned}
$$

Wie wir schon wussten: Die Gleichung ist nur für $x = 8 \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Da sich auf der rechten sowie auf der linken Seite höchstens ein Polynom ersten Grades befindet, handelt es sich übrigens um eine **lineare Gleichung**.
Wir werden jetzt eine Lösungsformel für eine lineare Gleichung mit einer Variablen angeben. Diese ist aber nur wieder zur Übung... wir werden diese (natürlich) nie nutzen, denn das einfache Ausrechnen geht schneller. ;-)

Bemerkung (7.2)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ gegeben, dann gilt für die lineare Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{a + bx = c \iff x = \frac{c-a}{b}}$$

7.2 - Nullstellen

Wir formulieren die Gleichung $a + bx = c$ mal etwas um, also wir rechnen auf beiden Seiten der Gleichung $-c$:

$$a + bx = c \Longleftrightarrow a - c + bx = 0$$

Jetzt sieht man: Wir suchen alle $x \in \mathbb{R}$, für die Null herauskommt.
So eine Gleichung nennt man auch **Nullstellenproblem**.

Bemerkung (7.3)

Sehen wir uns die Gleichung etwas genauer an... dann wird auch sofort klar, weshalb diese Gleichung Nullstellenproblem genannt wird:

- $p(x) = a - c + bx$ ist ein Polynom
- Bei $a - c + bx = 0$ werden also alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ gesucht, in denen die Funktion (das Polynom) $p(x) = a - c + bx$ die x-Achse schneidet
- Man sucht also die **Nullstellen des Polynoms** $a - c + bx$

Mit Hilfe von Bemerkung (7.2) wissen wir schon, wie viele Nullstellen es gibt, falls $b \neq 0$. Nämlich genau eine Nullstelle mit $x = \frac{c-a}{b}$.

Bemerkung (7.4)

Offensichtlich kann man also jede Gleichung äquivalent zu einem Nullstellenproblem umformen, indem man so oft addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert bis auf einer Seite nur noch 0 steht. Im Folgenden ist unsere rechte Seite also immer 0, da man es immer dahingehend umformen kann.

Bisher haben wir uns nur die Nullstelle eines Polynom ersten Grades angeschaut. Interessanter wird es natürlich, wenn man Polynome höheren Grades betrachtet.

Sei also das folgende (allgemeine) Polynom zweiten Grades gegeben... ohne Einschränkung soll der Leitkoeffizient immer gleich 1 sein:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2 + px + q$$

Uns interessiert wieder, wie viele $x \in \mathbb{R}$ es gibt, die die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erfüllen und somit die Nullstellen von f sind.

Warum können wir hier überhaupt - stellvertretend für alle Polynome mit Grad 2 - dann ohne Einschränkung nur Polynome mit Leitkoeffizient 1 betrachten?

Warum können wir das so einfach annehmen?

Nehmen wir einmal an, wir suchen die Nullstellen von $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$, also die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x + 7 = 0$.

Wir teilen auf beiden Seiten durch den Leitkoeffizienten (hier 2) und erhalten:
$\iff x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = 0$ und schon ist der Leitkoeffizient 1.

7.2 - Nullstellen

Es gibt drei Typen solcher Polynome: $x^2 + q$, $x^2 + px$ bzw. $x^2 + px + q$.
Gehen wir mal alle mit Beispielen durch:

$$x^2 - 4 = 0$$

Hier haben wir eine Besonderheit: Wir haben nämlich keinen "gemischten Term", also bei $x^2 + px + q$ haben wir **kein px**. Dadurch wird die Lösung sehr einfach:
Wir bringen die -4 auf die andere Seite, indem wir auf beiden Seiten $+4$ rechnen:

$$x^2 = 4$$

Welche Zahlen ergeben zum Quadrat genommen 4? Genau: $x = -2$ oder $x = 2$.
Das haben wir uns nun so überlegt. Aber eigentlich würde hier der **Betrag** ins Spiel kommen. Dann schreiben wir das so:

$$x^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = \sqrt{4} \quad = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \text{ oder } x = -2$$

Also erhalten wir zwei Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

VORGRIFF auf Kapitel 9: Der Betrag einer reellen Zahl:

Definition (9.1)

Für $a \in \mathbb{R}$ wird der **Absolutbetrag von a** (auch **Betrag** genannt) wie folgt abschnittsweise definiert (als Symbol schreibt man $|a|$):

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Der Betrag einer reellen Zahl ist stets positiv oder Null.
Es gilt also: $|a| \in \mathbb{R}_+$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

$$|-2| = 2, \qquad |3| = 3, \qquad |x| = 2 \iff x = 2 \text{ oder } x = -2$$

Nächstes Beispiel:

$$x^2 + 7x = 0$$

Besonderheit: Hier haben wir bei $x^2 + px + q$ **kein q**.
Auch dieser Typ ist sehr einfach, denn durch das Fehlen von q (also der Zahl ohne x) können wir insgesamt immer ein x ausklammern:

$$x^2 + 7x = 0 \Longleftrightarrow x \cdot (x + 7) = 0$$

Wir wissen schon aus der Schule:
Ein Produkt in $\mathbb{R}$ ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist:

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x + 7 = 0$$

Also erhalten wir zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -7$$

Und nun das letzte Beispiel:

$$x^2 + x - 2$$

Wir werden hier nun zwei Herangehensweisen betrachten zum Lösen solcher quadratischer Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p \neq 0$, $q \neq 0$:

1. **Quadratische Ergänzung**
2. **p-q-Formel**

Beispiel (7.5)

Wir suchen die Lösungen von

$$x^2 + 1x - 2 = 0$$

Wir nutzen die Methode der **quadratischen Ergänzung**

$$x^2 + 1x - 2 = \left(x^2 + 1x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \stackrel{!}{=} 0}$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \iff \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\iff x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\iff x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -2$$

Die Nullstellen lauten also $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$

Hätten wir hier das allgemeine Polynom $x^2 + px + q$ verwendet, so hätten wir als Ergebnis der quadratischen Ergänzung eine allgemeine Lösungsformel erhalten für die Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades.
Ihr kennt diese schon aus der Schule:

Satz (7.6)

Wir betrachten das quadratische Polynom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ f(x) = x^2 + px + q$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Nullstellen von f die sogenannte **p-q-Formel**:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{bzw. einfacher} \quad \boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Wir sehen: Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt immer höchstens zwei Lösungen.
Warum höchstens?

Berechne die Nullstellen von:

$$x^2 - 3x - 4$$

Wir nutzen die $p-q-$Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit } p = -3 \text{ und } q = -4$$

Also:

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-4)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Wir erhalten also die Nullstellen

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

7.2 - Nullstellen

Hier ein Beispiel dafür, dass der Ausdruck unter der Wurzel auch negativ werden kann. Dann gibt es - wie in der Schule gelernt - keine Lösung in $\mathbb{R}$. Aber in $\mathbb{C}$:

Beispiel (7.8)

Bestimme die Nullstellen des Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x^2 + x + 1$$

Wir probieren mal die p-q-Formel: Es gilt hier $p = 1$ und $q = 1$.
Einsetzen in die Formel ergibt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

Hier steht eine negative Zahl unter der Wurzel. Also folgte in der Schule: Das Polynom $p(x) = x^2 + 1$ besitzt **keine** Nullstellen in $\mathbb{R}$. Das ist auch richtig.
Später werden wir sehen (unter Benutzung der imaginären Zahl i, für die ja $i^2 = -1$ gilt), dass dieses Polynom die beiden **komplexen** Nullstellen

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \qquad \text{besitzt.}$$

Beispiel (7.9)

Bestimme die Nullstellen des Polynoms

$$x^3 + 2x^2 + x$$

Sehen wir uns das Polynom mal genauer an. Es ist vom Grad 3, kann also nicht mit der $p - q$-Formel gelöst werden. Uns fällt aber auf:
Wir können ein x ausklammern:

$$x^3 + 2x^2 + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 0$$

Also gilt

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

Mit erster binomischer Formel:

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad (x+1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -1$$

Die Nullstellen sind also: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -1$.

Dies war ein sehr spezielles Polynom 3. Grades... wir werden später lernen, wie man allgemein die Nullstellen eines Polynoms mit Grad ≥ 3 berechnet (Polynomdivision!).

Beispiel (7.10)

Bestimme die Nullstellen von

$$x^4 - 6x^2 + 9$$

Auch hier sieht es so aus, als wäre die p-q-Formel nicht anwendbar, da das Polynom ja Grad 4 hat. Wir können allerdings hier das Verfahren der **Substitution** nutzen:
Wir substituieren

$$z := x^2$$

und erhalten dann ein Polynom 2. Grades (in der Variablen z):

$$z^2 - 6z + 9 \stackrel{!}{=} 0$$

Wir sehen: Hier kann man sogar die zweite binomische Formel nutzen:

$$(z-3)\cdot(z-3) = 0 \quad \text{, also } z_{1,2} = 3$$

Anschließende **Rücksubstitution** (also wieder z durch das vorherige x^2 ersetzen) ergibt $x^2 = 3$, liefert uns dann also 4 Nullstellen:

$$x_{1,2} = \sqrt{3} \quad \text{und } x_{3,4} = -\sqrt{3}$$

Bemerkung (7.11)

Nun haben wir von einigen Polynomen die Nullstellen berechnet. Was für eine Eigenschaft bzgl. der Anzahl an Nullstellen kann man feststellen?

- Die Gleichung $7 + 3x^1 - 31 = 0$ besitzt **eine** reelle Lösung
- Die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ besitzt **zwei** reelle Lösungen
- Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ besitzt **zwei** komplexe Lösungen
- Die Gleichung $x^3 + 2x^2 + x = 0$ besitzt **drei** reelle Lösungen
- Die Gleichung $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ besitzt **vier** reelle Lösungen

Scheinbar hängt die Anzahl der Nullstellen mit dem Grad des Polynoms zusammen!

Satz (7.12, Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit grad $p \geq 1$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle, also ein $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$.

Damit zeigen wir dann später, dass jedes Polynom vom Grad n **genau** n Nullstellen hat in $\mathbb{C}$.

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !