Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 8

(Lineare) Gleichungssysteme

Beispiel (8.1)

Aufgabe: Finden Sie alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x_1 - 2x_2 &= 3 \\ \text{(II)} \quad 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Besonderheit im Gegensatz zu nur einer Gleichung: Die Lösungen x_1 und x_2 müssen **beide Gleichungen gleichzeitig** erfüllen.

Für dieses (lineare) Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten nutzen wir jetzt erstmal das aus der Schule bekannte **Einsetzverfahren**:
Dazu formen wir eine der Gleichungen nach einer Unbekannten um und setzen dies dann in die andere Gleichung ein. Wir starten hier mit Gleichung (II):

$$\text{(II):} \quad 2x_1 + 2x_2 = 6 \iff 2x_1 = 6 - 2x_2 \iff x_1 = 3 - x_2$$

Nun setzen wir also $x_1 = 3 - x_2$ in die Gleichung (I) ein, sodass wir nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten haben.

Beispiel (8.1)

Dann gilt also:

$$x_1 - 2x_2 = 3 \Leftrightarrow 3 - x_2 - 2x_2 = 3 \Leftrightarrow 3 - 3x_2 = 3 \Leftrightarrow \; -3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Die Lösung $x_2 = 0$ setzen wir nun ein in unsere vorhin umgestellte Gleichung (II) $x_1 = 3 - x_2$, um x_1 zu erhalten: $x_1 = 3 - 0 = 3$.

Die Zahlen $\boxed{x_1 = 3}$ und $\boxed{x_2 = 0}$ erfüllen also beide Gleichungen gleichzeitig, lösen also das Gleichungssystem. Wir geben die Lösungsmenge an:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Zur Info: Als Lösung erhalten wir einen **Vektor** aus dem $\mathbb{R}^2$, also einen Vektor mit 2 Komponenten. Da wir **einen** Vektor erhalten, ist die Lösung also **eindeutig**.

Manko: Dieses **Einsetzverfahren** dauert viel zu lange und ist bei mehr als 2 Gleichungen bzw. mehr als 2 Unbekannten auch nicht besonders hilfreich.
Wie machen wir sowas also richtig?

Schauen wir uns das Beispiel nochmal an... und zwar so, wie wir das dann später auch in HöMa rechnen. Wir werden nicht auf alle Feinheiten/Definitionen eingehen können, aber Ihr erhaltet so schon mal einen Einblick, wie man das macht:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 1x_1 - 2x_2 &= 3 \\ \text{(II)} \quad 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Wir schreiben das mal in verkürzter Schreibweise und bringen diese auf **Zeilen-Stufen-Form**:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Nun schreiben wir die bearbeitete Kurzform wieder als Gleichungen hin und lösen anschließend stets von unten nach oben:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 1x_1 - 2x_2 &= 3 \\ \text{(II)} \quad 0x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der unteren Gleichung folgt: $\boxed{x_2 = 0}$ Mit Einsetzen von $x_2 = 0$ in die obere Gleichung folgt: $x_1 - 2 \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 3}$ Fertig ! Lösungsmenge wie gehabt.

Ihr habt sicher gemerkt: Dadurch, dass wir die Variablen in der Kurzschreibweise weglassen, ist das LGS (und die Rechenschritte) deutlich übersichtlicher als in Gleichungsschreibweise.

Wir wollen uns nun schon mal ein paar Definitionen ansehen, die wir im kommenden Wintersemester dann wiedersehen werden:

Definition (8.2)

So eine verkürzte Schreibweise eines (linearen) Gleichungssystems (**LGS**) nennen wir eine **Matrix**. Wir unterscheiden hier zwischen der linken Seite des LGS und der rechten Seite des LGS. Die linke Seite nennen wir die Matrix **A** (da stehen die **Koeffizenten** des LGS), die rechte Seite nennen wir **b**. Das LGS heißt **homogen**, wenn die rechte Seite nur aus Nullen besteht.
Ansonsten heißt es **inhomogen**.

Die gesamte Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ nennen wir die **erweiterte Koefffizientenmatrix**.

Später (wenn wir genauer wissen, was Vektoren und Matrizen sind) werden wir ein LGS auch oft schreiben in der Form: $A \cdot x = b$.

Wie Ihr sicher gemerkt habt, besteht das vorhin angewendete Verfahren aus zwei Teilen:

1) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ (also das in verkürzter Schreibweise geschriebene LGS) auf eine noch weiter vereinfachte Form mit vielen Nullen, die sogenannte **Zeilen-Stufen-Form**.

Dazu bearbeiten wir die einzelnen ”Reihen” der Zahlen (die sogenannten **Zeilen**) mit **elementaren Zeilenumformungen**
(sowas wie die bekannten Äquivalenzumformungen bei einer Gleichung).

2) Wir schreiben die vereinfachte Form $(A|b)$ wieder als Gleichungen hin und lösen dann von unten nach oben... fertig.

Beides zusammen nennt man dann den **Gauß-Algorithmus** bzw. das **Gauß-Verfahren**.

Was dürfen wir genau bei der Bearbeitung mit den "Zeilen" machen?

Bemerkung (8.3)

Folgende Operationen werden als elementare Zeilenumformungen bezeichnet und verändern die Lösungsmenge eines LGS **nicht**:

(E1) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$

(E2) Vertauschen von Zeilen

(E3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Hinweis: Bei (E3) bleibt die Zeile, die malgenommen und addiert wurde, stets **unverändert** !

Beispiel (8.4)

Wir betrachten das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Wir schreiben das mal etwas geschickter:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 4 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Jetzt können wir das LGS in verkürzter Schreibweise $(A|b)$ schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Damit rechnen wir jetzt und lösen das LGS.

Beispiel (8.4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Am liebsten haben wir immer ganz oben links eine 1. Dies kann man erreichen durch Vertauschen zweier Zeilen oder durch Malnehmen der obersten Zeile mit einer Zahl. Hier: Entweder tauschen wir die 1. mit der 2. Zeile oder wir multiplizieren die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$. Tauschen ist einfacher, also vertauschen wir die 1. und 2. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 2 & 0 & 4 \\ \color{red}{2} & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Im nächsten Schritt müssen wir die rot markierten Zahlen auf Null bringen, indem wir die erste Zeile mit einer Zahl malnehmen und dann zu der entsprechenden Zeile addieren. Da beides Mal dieselbe rote Zahl steht, machen wir zweimal dasselbe: Wir multiplizieren die erste Zeile mit (-2) und addieren Sie auf die 2. (und danach auch auf die 3.) Zeile.

Beispiel (8.4)

Also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 2 & 0 & 4 \\ \color{red}{2} & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen: Die erste Zeile bleibt dabei im Endeffekt völlig unverändert !
Ändern tun sich nur die 2. und 3. Zeile.
Wir würden nun weitergehen in die zweite Zeile und an die zweite Stelle, um darunter Nullen zu erzeugen. Aber wir sehen: Das ist schon der Fall !
Also sind wir fertig: Wir haben die **Zeilen-Stufen-Form** erreicht.
Der erste Schritt des Gauß-Algorithmus ist damit abgeschlossen.

Vor dem zweiten Schritt führen wir noch einen neuen Begriff ein:

Definition (8.5)

Die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen (auf der linken Seite) in der Zeilen-Stufen-Form bezeichnen wir als den **Rang von A**. Hier: Rang $(A) = 2$

Die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen insgesamt in der Zeilen-Stufen-Form bezeichnen wir als den **Rang von (A|b)**. Hier: Rang $(A|b) = 2$

Noch ein Beispiel. Wir nutzen gleich die neuen Begriffe:
Bringe auf Zeilen-Stufen-Form und bestimme den Rang von A sowie den Rang von $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \leftrightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\ + \\ \quad\quad + \end{array} \leftrightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \leftrightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array} \leftrightsquigarrow$$

$$\leftrightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

Wir können aus der Zeilen-Stufen-Form ablesen: $\text{Rang}(A) = 3$ und $\text{Rang}(A|b) = 3$.

So... kommen wir nun zum
Schritt 2) Vereinfachte Form nun wieder **in Gleichungen schreiben** und anschließendes **Lösen von unten nach oben**.

Wir machen das mal sofort für das Beispiel, was wir gerade auf Zeilen-Stufen-Form gebracht haben:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{(II)} \quad & 0x_1 + 1x_2 - 4x_3 = 3 \\ \text{(III)} \quad & 0x_1 + 0x_2 - 6x_3 = 3 \end{aligned}$$

Also unten starten: (III): $-6x_3 = 3 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = -\frac{1}{2}}$

Weiter mit (II): $x_2 - 4x_3 = 3 \Leftrightarrow x_2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 1}$

Beides einsetzen in (I): $x_1 - 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{also } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

So: Zeit, auch die anderen angefangenen Beispiele fertig zu lösen:

Beispiel (8.6 - Fortsetzung von Beispiel 8.4)

Die Zeilen-Stufen-Form lautete:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gilt Rang $A = 2$ und Rang$(A|b) = 2$.
Wir starten wie immer ganz unten, aber da steht eine komplette Nullzeile, welche uns natürlich nichts nützt. Also betrachten wir die zweite Zeile, welche uns folgende Gleichung liefert:

$$(\text{II}): \quad 2x_2 - 2x_3 = 2$$

Man kann nun nach x_2 oder x_3 auflösen. Wir lösen mal nach x_2 auf und ersetzen x_3 durch den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, also: $\boxed{x_3 := \lambda}$

Hinweis: λ ist ein griechischer Buchstabe. In der Mathematik nimmt man gerne griechische Buchstaben als Parameter, wie Ihr noch sehen werdet in HöMa. ;-)

Umgestellt nach x_2 und eingesetzt, ergibt sich damit: $x_2 = 1 + x_3 = 1 + \lambda$.

Es gilt also: $\boxed{x_2 = 1 + \lambda}$

Beispiel (8.6 - Fortsetzung von Beispiel 8.4)

Kommen wir nun zur obersten Zeile. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$x_1 + x_3 = 1$$

Die schon bestimmten Unbekannten ($x_2 = 1 + \lambda$ und $x_3 = \lambda$) werden eingesetzt :
(Hinweis: Hier wird nur x_3 benötigt.)

$$x_1 + x_3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + \lambda = 1$$

Auflösen nach x_1 liefert:

$$\boxed{x_1 = 1 - \lambda}$$

Wie lautet nun die Lösungsmenge? Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \text{ also } \mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Das LGS besitzt also unendlich viele Lösungen, welche alle auf einer Gerade liegen.

Beispiel (8.7)

Sehen wir uns noch ein LGS in verkürzter Schreibweise an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3)\ \ \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es gilt also Rang $A = 2$ und Rang $(A|b) = 3$.

Schauen wir uns einmal die letzte Zeile an. Die entsprechende Gleichung lautet:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Es existieren keine Werte $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, für die diese Gleichung gilt. Das LGS ist also **nicht lösbar** und die Lösungsmenge lautet:

$$\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$$

Wir haben ja bei jeder Aufgabe immer den Rang (A) und den Rang $(A|b)$ berechnet... wann immer diese beiden gleich waren, war das LGS lösbar... wann immer diese beiden ungleich waren, war das LGS NICHT lösbar.

Tatsächlich besteht da ein Zusammenhang:

Satz (8.9)

Für ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ gilt das Lösbarkeitskriterium:

$$\boxed{A \cdot x = b \ \text{(also unser LGS) ist lösbar} \iff \text{Rang } A = \text{Rang } (A|b)}$$

Mehr dazu später in Höhere Mathematik I...

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !