Kapitel 1 – Mengen

Kapitel 1 – Mengen

1.1 „Definition“: Mengen (nach Georg Cantor)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Um auszudrücken, dass a ein Element der Menge M ist,
schreiben wir kurz $a \in M$ (oder $M \ni a$).
Wenn b kein Element von M ist, schreiben wir $b \notin M$.

Zwei Varianten zum Notieren von Mengen:

- Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\dots\}$ (Aufpassen, kann missverständlich sein)
- Angabe mittels charakteristischer Eigenschaft:

  $$\{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

  Lese: „die Menge aller x, die die Eigenschaft E haben“

Beispiele zur Aufzählung mit Mengenklammern

$\{1, 2, 3\}$ Die Menge, die aus den Zahlen 1, 2, 3 als Elementen besteht

$\{3, 3, 2, 3, 1\}$ $= \{1, 2, 3\}$, denn Mehrfachnennungen bringen nichts, und die Reihenfolge ist egal.

$\{2\}$ eine einelementige Menge

$\{\}$ ist die leere Menge, die kein Element enthält. Alternative Notation: $\emptyset$

Zwischenbemerkung: Eine neue Notation kann man per Formel so einführen: $\emptyset := \{\}$, gelesen: „wird definiert durch".
Der Doppelpunkt steht auf der Seite, die definiert wird: $\{\} =: \emptyset$

$\mathbb{N}$ $:= \{1, 2, 3, \dots\}$: die Menge der natürlichen Zahlen, die Punkte „$\dots$" führen die Liste „sinnvoll" weiter.

$\mathbb{N}_0$ $:= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{Z}$ $:= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen

Beispiele zur Beschreibung mit Eigenschaft

$\mathbb{P}$ $:= \{p \in \mathbb{N} \mid p > 1,$ nur 1 und p teilen $p\}$ Primzahlen, mit der Eigenschaft wird eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ beschrieben.

$\mathbb{Q}$ $:= \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ die Menge aller Brüche mit Konstruktionsvorschrift aus den Bestandteilen, die nach $|$ aufgelistet sind

$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, vgl. später

$\mathbb{R}_+$ $:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen

$\{0, 1\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\}$: aufgezählt und beschrieben.

Beispiele für $\in$:

$$1 \in \mathbb{N}, \quad 0 \notin \mathbb{N}, \quad 4 \in \mathbb{Q}, \text{ denn } 4 = \frac{4}{1}$$

1.2 Definition: Mengenoperationen

Es seien M und N Mengen.

1. Vereinigung: Menge der Objekte aus M oder N:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

   Beispiele: $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

2. Schnitt/Durchschnitt: Menge der Objekte, die in M und in N liegen:

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

   Beispiele: $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$, $\{1,2\} \cap \{0,4\} = \emptyset$

3. Differenz von N und M:
   Menge der Elemente von N, die nicht in M enthalten sind:

$$N \setminus M := \{x \in N \mid x \notin M\}.$$

   Beispiele: $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

1.3 Definition: Mengenrelationen

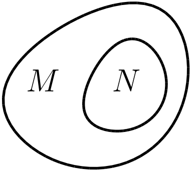
Es seien wieder M, N Mengen.

1. M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.
2. M heißt Teilmenge von N und N heißt Obermenge von M, wenn alle Elemente von M auch in N enthalten sind.
   Symbolisch: $M \subseteq N$ oder $N \supseteq M$.
3. Wenn $M \subseteq N$, also M eine Teilmenge von N ist, so nennt man $M^c := N \setminus M$ auch das Komplement von M in N.
4. Zwei Mengen M, N sind gleich ($M = N$), wenn $M \subseteq N$ und $M \supseteq N$, also wenn M und N die gleichen Elemente enthalten.

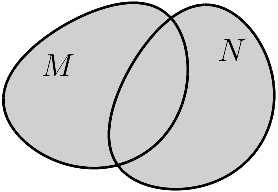
Beispiel: $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ gilt für alle Mengen M,
Beispiel: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Vorsicht: Manchmal wird $\subset$ anstelle von $\subseteq$ verwendet,
manchmal bedeutet $M \subset N$ aber auch die echte Teilmengenrelation $\subsetneq$,
d. h. $M \subseteq N$ und $M \neq N$.

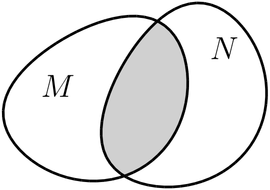
Graphisch kann man die Mengenoperationen gut mit Hilfe von Venn-Diagrammen darstellen:



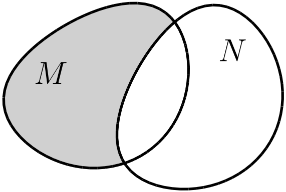
$N \subset M$



$M \cup N$



$M \cap N$



$M \setminus N$

1.4 Satz: Rechenregeln für Mengenoperationen (M, N, P Mengen)

Kommutativität von Vereinigung und Schnitt:

1. $M \cup N = N \cup M$
2. $M \cap N = N \cap M$

Assoziativität von Vereinigung und Schnitt:

3. $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$
4. $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$
   (Praktisch: Mehrfachschnitte und -vereinigungen kann man ohne Klammern schreiben: $M \cap N \cap P$ bzw. $M \cup N \cup P$.)

Distributivität:

5. $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$
6. $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$

De Morgansche Regeln:

7. $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$
8. $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

1.5 Definition: Kartesisches Produkt

1. Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier Mengen M und N enthält als Elemente die Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$:

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}.$$

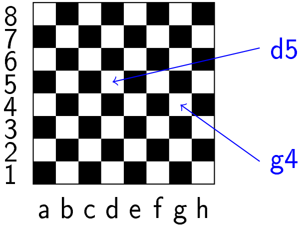
   Paare sind geordnete Listen aus zwei Objekten.
   Die Reihenfolge ist bei Paaren wichtig:

$$(a, b) = (x, y) \quad \text{bedeutet} \quad a = x \text{ und } b = y.$$

2. Das kartesische Produkt mehrerer Mengen $M_1, \ldots, M_k$ wird analog definiert, z. B. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
   Die Elemente heißen Tupel, genauer: Paare sind 2-Tupel, 3-Tupel sind Tripel, 4-Tupel sind Quadrupel, 5-Tupel sind Quintupel, und allgemein gibt es n-Tupel. (Vorsicht: $(x, y) \neq \{x, y\}$)

Die Positionen auf einem Schachbrett werden mit Koordinaten, also mit einem kartesischen Produkt beschrieben:

$$(d,5),(g,4) \in \{a,b,c,d,e,f,g,h\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$



Graphische Darstellung von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als zweidimensionale Fläche bzw. dreidimensionalen Raum...

In der Mathematik will man oft Aussagen möglichst kurz aber dennoch präzise formulieren. Dazu nutzt man verschiedene Kurzschreibweisen. Dazu gehören auch Quantoren.

1.6 Definition: Quantoren

Ist A eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge M sinnvoll ist, so schreiben wir

$$\forall x \in M : A(x)\,,$$

wenn jedes Element aus M die Eigenschaft A hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ und

$$\exists x \in M : A(x)\,,$$

wenn es mindestens ein Element aus M gibt, das die Eigenschaft A hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

Kapitel 2 – Zahlen

Kapitel 2 – Zahlen

Zahlenbereiche, die wir schon getroffen haben:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Schreibweisen von rationalen/reellen Zahlen als
<u>unendliche Dezimalbrüche</u> = <u>Dezimalentwicklungen</u>:

Rationale Zahlen = Brüche:

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{11}{5} = \frac{22}{10} = 2.2, \quad \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0.08,$$
$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad \frac{1}{11} = 0.\overline{09}.$$

Darstellung auf Zahlenstrahl!

Kapitel 2 – Zahlen

Sprechweise: „Die Zahl x hat die unendliche Dezimalbruchdarstellung“ oder einfach Dezimalentwicklung

$$\pm n{,}a_1 a_2 \ldots \quad \text{bzw.} \quad \pm\, n.a_1 a_2 \ldots$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und den Ziffern $a_1 a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, wenn

$$x = \pm\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10\,000} + \cdots\right)$$

Vorsicht: $0.\overline{9} = 1$

Auf dem Zahlenstrahl ist kein Platz für eine Zahl zwischen $0.\overline{9}$ und 1, das sind zwei Darstellungen für dieselbe Zahl.

Ebenso: $12.00\overline{9} = 12.01$, $-1.4\overline{9} = -1.5$, $\ldots$

Kapitel 2 – Zahlen

2.1 Definition: Rationale und irrationale Zahlen

1. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist die Menge der Dezimalbrüche (ohne $\overline{9}$).
2. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche.
3. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbrüche, heißen irrationale Zahlen.

Beispiele irrationaler Zahlen:

1. Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge 1 ist irrational. Diese Länge ist $\sqrt{2} = 1.414213562 \cdots$.
2. Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 ist irrational. Diese Länge ist $\pi = 3.141592654 \cdots$.
3. Die eulersche Zahl $e = 2.718281828 \cdots$ ist irrational.

2.2 Definition: Rechenoperationen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sind die Rechenoperationen $x + y$, $x - y$, xy und für $y \neq 0$ auch $\frac{x}{y}$ erklärt/definiert.

Abkürzende Schreibweise: $-x := 0 - x = (-1) \cdot x$

Rechenregeln für Zahlen $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$

1. Kommutativgesetze: $x + y = y + x$ und $xy = yx$
2. Assoziativgesetze: $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $x(yz) = (xy)z$
3. Distributivgesetz: $x(y + z) = xy + xz$

Als Konsequenz erhalten wir die drei binomischen Formeln:

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
5. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
6. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

2.3 Definition: Kurzschreibweisen für Summen und Produkte

Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ und
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Dabei kann der Laufindex (oben jeweils k) eine beliebige (noch nicht verwendete) Variable sein, etwa $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

Vereinbarungen für den Fall $m > n$ („leere Summe" bzw. „leeres Produkt"):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Rechenregeln und Beispiele:

1. $a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)$
2. $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$ und
3. $\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$.
4. Indexverschiebung: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t}$.
5. Arithmetische Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
6. geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für jede reelle Zahl $q \neq 1$.

2.4 Definition: Potenzen

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^n := \prod_{k=1}^{n} a$.

Insbesondere gilt also $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$ aber $0^n = 0$ für $n > 0$.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

$a \in \mathbb{R}$ heißt die Basis und $n \in \mathbb{Z}$ der Exponent der Potenz a^n.

2.5 Potenzregeln

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^m a^n = a^{n+m}$,
2. $a^n b^n = (ab)^n$,
3. $(a^m)^n = a^{mn}$,

falls die Ausdrücke definiert sind.

2.6 Definition: Quadratwurzel

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $b^2 = a$ so definieren wir

$$\sqrt{a} := \begin{cases} b & \text{falls } b \geq 0 \\ -b & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Die Zahl $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel von a (und ist stets nicht-negativ).

2.7 Existenz der Quadratwurzel

Die Gleichung $x^2 = a$ besitzt ...

- ... für $a < 0$ keine reelle Lösung, (Quadrate in $\mathbb{R}$ stets positiv)
- ... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$,und
- ... für $a > 0$ die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Die vorherige Aussage lässt sich noch verallgemeinern:

2.8 Satz: Höhere Wurzeln

1. Ist n eine natürliche ungerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung und diese bezeichnen wir mit $x = \sqrt[n]{a}$.
2. Ist n eine natürliche gerade Zahl mit $n \neq 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a \ldots$
   - $\ldots$ für $a < 0$ keine reelle Lösung,
   - $\ldots$ für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und
   - $\ldots$ für $a > 0$ genau zwei reellen Lösungen, wovon eine positiv und eine negativ ist. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt[n]{a}$ und die zweite ist dann gegeben durch $-\sqrt[n]{a}$.

2.9 Bemerkung

Wir setzen nun $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$ und $n \neq 0$, und definieren(!) $a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dann kann man zeigen, dass die Rechenregeln aus Satz 2.6 weiterhin gültig bleiben.
Somit haben wir das Potenzieren von ganzen auf rationale Exponenten erweitert.

2.10 Satz: p-q-Formel

Es sei $D := p^2 - 4q$. Dann besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ...

- ... die eindeutige (reelle) Lösung $x = -\frac{p}{2}$ falls $D = 0$,
- ... die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = -\frac{p + \sqrt{D}}{2}$ und $x_2 = -\frac{p - \sqrt{D}}{2}$ falls $D > 0$, und
- ... keine reelle Lösung falls $D < 0$.

Die Zahl D heißt Diskriminante der quadratischen Gleichung.

Der Beweis ist hier selbst eine konstruktive Lösungsmethode für quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung), und man kann ihn anstelle der Formeln verwenden.

2.11 Definition: Fakultät und Binomialkoeffizient

1. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fakultät definiert als
$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$
Also gilt insbesondere $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.
2. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert als
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad$ und $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad$ (Additionstheorem).

Wegen des Additiontheorems lassen sich die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck anordnen:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & \binom{n}{k} & & & & & n \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \\
 & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

2.12 Binomischer Lehrsatz (Beweis später)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Kapitel 3 – Ordnung und Betrag

3.1 Definition: Ordnung

Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ hat genau eine der folgenden drei Eigenschaften:

- x ist negativ: $x < 0$,
- x ist gleich Null: $x = 0$, oder
- x ist positiv: $x > 0$.

Wir definieren ...

- ... $x > y$ durch $x - y > 0$.
- ... $x \geq y$ durch $x > y$ oder $x = y$.

Analog werden $x < y$ und $x \leq y$ definiert.

Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genau eine der drei Relationen:

$$x < y \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x > y.$$

Die Zeichen $\leq, \geq, <, >$ und $=$ heißen Ordnungszeichen.

Mit Hilfe der Ordnungszeichen definieren wir spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

3.2 Definition: Intervalle

Beschränkte Intervalle:

- Abgeschlossenes Intervall: $[a, b] := [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall: $(a, b) := \,]a, b[\, := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall: $[a, b) := [a, b[\, := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- Halboffenes Intervall: $(a, b] := \,]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Unbeschränkte Intervalle:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ und $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ und $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

3.3 Rechenregeln

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Ist $x < y$ und $y < z$, dann gilt $x < z$.
2. Ist $x < y$, dann ist $x + z < y + z$.
3. Ist $z > 0$ und $x < y$, so ist $xz < yz$.

Folgerungen:

4. Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $x = y$.
5. Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $xy > 0$.
6. Ist $z < 0$ und $x < y$, so ist $xz > yz$.
7. Ist $0 < x < y$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.
8. Ist $0 \leq x \leq y$, so gilt $x^2 \leq y^2$.

3.4 Satz: Vorzeichen von Produkten

Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ ist gleichbedeutend damit,
  dass es mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $x_j = 0$.
- $\prod_{i=1}^{n} x_i \geq 0$ ist gleichbedeutend damit,
  dass nur eine gerade Anzahl der Faktoren x_j negativ ist.

Dieser Sachverhalt ist nützlich beim Lösen von Ungleichungen.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, die $(x-3)(x-5) > 0$ erfüllen.
Fallunterscheidung: $x < 3$, $x \in (3,5)$, $x > 5$.
Man erhält: $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x-5) > 0\} = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$.

3.5 Definiton: Betrag

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Abstand von x zu 0:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand von x und y.

Der Betrag löscht das Vorzeichen von x, vgl. Wurzel: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Eigenschaften des Betrags

1. $|x| = 0$ ist gleichbedeutend mit $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$ mit Gleichheit an genau einer Stelle, wenn $x \neq 0$.
4. $|xy| = |x||y|$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
6. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

3.6 Satz: Quadratische Ungleichungen

Es gilt

$$x^2 + px + q < 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \frac{D}{4},$$

wobei $D = p^2 - 4q$ die Diskriminante ist.

- Falls $D \leq 0$, so hat $x^2 + px + q < 0$ keine reelle Lösung.
- Für $D > 0$ gilt

$$x^2 + px + q < 0 \iff x \in \left(\frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \frac{-p + \sqrt{D}}{2}\right).$$

Für die umgekehrte Ungleichung $x^2 + px + q > 0$ gilt:

- Falls $D < 0$, so ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q > 0\} = \mathbb{R}$.
- Falls $D \geq 0$:

$$x^2 + px + q > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{-p - \sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \infty\right).$$

Kapitel 4 – Abbildungen und Funktionen

4.1 Definition: Abbildung / Funktion

Seien D und W nicht leere Mengen. Eine Abbildung f von D nach W ist eine Vorschrift, die **jedem** $x \in D$ **genau ein** Element $y \in W$ zuordnet. Wird dem Element $x \in D$, das $y \in W$ zugeordnet, so schreibt man $y = f(x)$. Das Format, in dem man Abbildungen angibt, ist:

$$f\colon D \to W, \quad x \mapsto f(x).$$

Die Notation „$f(x)$“ liest man „f von x“. Sie deutet an, dass f das Argument x in den Funktionswert $f(x)$ transformiert oder überführt.

Bezeichnungen

In der Funktionsangabe $f\colon D \to W,\ x \mapsto f(x)$ stehen:

- f der Name der bzw. das Symbol für die Funktion
- D der Definitionsbereich der Funktion
- W der Wertevorrat oder Wertebereich der Funktion
- x das Argument der Funktion
- $f(x)$ der Funktionswert an der Stelle x / das Bild von x unter f

$W^D := \{f \mid f\colon D \to W\}$ ist die Menge aller Abbildungen von D nach W.

4.2 Definition: Gleichheit von Abbildungen

Zwei Abbildungen $f\colon D \to W$ und $g\colon D' \to W'$ sind gleich, $f = g$, wenn

- $D = D'$,
- $W = W'$,
- für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Beispiel / Schreibweisen

Oft definiert man eine Abbildung mit Hilfe eines Terms:

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{x-2} \tag{1}$$

$$\mathbb{R}\setminus\{2\} \ni x \mapsto \tfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$f(x) := \tfrac{1}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \tag{3}$$

$$x \mapsto \tfrac{1}{x-2} \tag{4}$$

$$f(x) := \tfrac{1}{x-2} \tag{5}$$

- Wird die Definitionsmenge nicht angegeben, so ist die im Kontext maximal mögliche Menge gemeint, hier: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (oder $\mathbb{C}\setminus\{2\}$).
- Ohne Angabe des Wertebereichs (3)-(5) bleibt dieser unklar, hier würde $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ passen.
- Vorsicht:
  Die Abbildung f und ihren Wert $f(x)$ nicht verwechseln!

Mehr Beispiele für Abbildungen

- Abschnittsweise Definition: siehe Betrag $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oder

$$\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

- Abrunden: $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$
- Aufrunden: $\lceil\cdot\rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$
- Bsp: $\lfloor\pi\rfloor = 3$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lceil \frac{22}{7} \rceil = 4$, $\lceil -\sqrt{2} \rceil = -1$

Wo verwendet man Funktionen/Abbildungen?

- Analysis I = Studium der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- Analysis II = Studium der Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
- Lineare Algebra klassifiziert lineare Abbildungen,
- Funktionentheorie: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
- Funktionalanalysis: Funktionen von Funktionen $\rightsquigarrow$ Quantenmechanik
- Differentialgleichungen $\rightsquigarrow$ Physik, Chemie, Biologie, Wirtschaftswissenschaften, ...
- Gruppentheorie studiert Symmetrien (= Funktionen) $\rightsquigarrow$ Standardmodell (Higgs-Teilchen)
- Geometrien werden über Symmetrien klassifiziert (Erlanger Programm)

4.3 Abbildungen und Teilmengen

Seien $f\colon D \to W$, $U \subseteq D$ und $V \subseteq W$. Dann heißen:

- $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq W$: das Bild von U unter f
- $f^{-1}(V) := \{x \in D \mid f(x) \in V\}$: das Urbild von V unter f
- $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$: der Funktionsgraph oder kurz der Graph von f
- $f|_U\colon U \to W$, $f|_U(x) := f(x)$: die Einschränkung von f auf U / Erweiterung von g
  und g eine Restriktion oder Einschränkung von f

Beispiele

- $f_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2$
- $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
- $h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2}$

$\Longrightarrow\ f_1 = g_1|_{[0,\infty)}$ und $g_1 = h_1$.

- $f_2\colon \mathbb{R} \setminus \{-2,1\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{x-1}{x^2+x-2}$
- $g_2\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x+2}$

$\Longrightarrow\ f_2 = g_2|_{\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}}$.

4.4 Definition: Komposition von Abbildungen

Im Fall $W \subseteq D'$ kann man $f\colon D \to W$ und $g\colon D' \to W'$ verketten:

- Die Abbildung

$$g \circ f\colon D \to W', \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

  heißt Verkettung oder Komposition von g und f.
- „$g \circ f$" liest man „g nach f", „g verknüpft mit f" oder „g verkettet mit f".
- Darstellung als Diagramm: $D \xrightarrow{\quad f \quad} W \subseteq D' \xrightarrow{\quad g \quad} W'$

Das Verknüpfen von Abbildungen $f\colon D \to W$, $g\colon D' \to W'$, $h\colon D'' \to W''$ mit $W \subseteq D'$ und $W' \subseteq D''$ ist assoziativ:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h(g(f(\,\cdot\,)))\colon D \to W'',$$

aber nicht kommutativ. ($f \circ g$ ist ja bei $W' \not\subseteq D$ sogar undefiniert).

Die identische Abbildung

$$\mathrm{id}_D\colon D \to D, \quad x \mapsto \mathrm{id}_D(x) := x$$

erfüllt für alle Funktionen $f\colon D \to W$ und $g\colon W \to D$

$$f \circ \mathrm{id}_D = f \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_D \circ g = g.$$

4.5 Definition: Umkehrabbildung

Zwei Abbildungen $f\colon D \to W$ und $g\colon W \to D$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_D \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_W$$

sind Umkehrfunktionen / Umkehrabbildungen / invers zueinander.
Schreibweise: $g = f^{-1}$ bzw. $f = g^{-1}$

Vorsicht: Das Urbild $f^{-1}(V)$ einer Menge $V \subseteq W$
und die Umkehrabbildung f^{-1} nicht verwechseln!
Kontext beachten: Wird eine Menge oder ein Element eingesetzt?

Vorsicht: Zu einer Abbildung $f : D \to W$ existiert im Allgemeinen keine Umkehrabbildung.

Die Abbildung f besitzt genau dann eine Umkehrabbildung, wenn für jedes $y \in W$ die Gleichung $f(x) = y$ eine eindeutige Lösung besitzt. Die Umkehrabbildung ist dann für dieses Paar $(x, y) \in D \times W$ definiert durch $f^{-1}(y) = x$.

Beispiele

Die folgenden Abbildungen besitzen keine Umkehrabbldung:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 0$
- $g : \{1, 2\} \to \{1\}\ ,\ 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto e^x$
- $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$

4.6 Beispiel: Berechnung der Umkehrfunktion

Gesucht: Umkehrabbildung zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 4x - 2$.
Strategie: Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf:

$$y = 4x - 2 \iff y + 2 = 4x \iff x = \tfrac{y+2}{4} = \tfrac{y}{4} + \tfrac{1}{2}.$$

Betrachte also die Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) := \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$.
Prüfe $g = f^{-1}$: Definitions- und Wertebereiche ✓, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$g \circ f(x) = \tfrac{4x-2}{4} + \tfrac{1}{2} = x \quad \text{und} \quad f \circ g(y) = 4 \cdot (\tfrac{y}{4} + \tfrac{1}{2}) - 2 = y.$$

Also ist g die Umkehrabbildung von f: $g = f^{-1}$.

4.7 Definition: Monotonie

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f ...

... <u>monoton wachsend</u> oder <u>isoton</u>, wenn $f(a) \leq f(b)$ ...

... <u>streng monoton wachsend</u>, wenn $f(a) < f(b)$ ...

... <u>monoton fallend</u> oder <u>antiton</u>, wenn $f(a) \geq f(b)$ ...

... <u>streng monoton fallend</u>, wenn $f(a) > f(b)$ ...

... für alle $a, b \in D$ mit $a < b$ gilt.

Beispiele

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ wächst $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^n$ streng monoton.
- Die Hyperbel $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht monoton, die Einschränkungen $f|_{(-\infty,0)}$ und $f|_{(0,\infty)}$ sind streng antiton.

4.10 Definition: Polynome

Eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ entweder $p(x) = 0$ oder

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit gewissen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, wobei $a_n \neq 0$. Speziell heißt:

- a_0 das Absolutglied oder der konstante Term von p,
- a_n der Leitkoeffizient von p,
- n der Grad von p, geschrieben $\mathrm{grad}(p)$.

Der Grad des 0-Polynoms wird als $-\infty$ definiert.
Ist der Leitkoeffizient $a_n = 1$, so heißt das Polynom normiert.

- x^n hat Grad n, Leitkoeffizient 1 und Absolutglied 0.
- $3x^2 - 6x + 12$ ist ein quadratisches Polynom: $\mathrm{grad}(p) = 2$.

4.11 Satz: Faktorisierung

Es sei p ein Polynom und x_0 eine Nullstelle von p. Dann gibt es ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) = \mathrm{grad}(p) - 1$ und $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

Das Polynom q aus der Faktorisierung lässt sich durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas bestimmen.

Ein Polynom vom Grad n hat immer maximal n Nullstellen. Nur wie findet man diese Nullstellen?

Satz: Rationale Nullstellen

Bei einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gilt für jede rationale Nullstelle $x_0 = \frac{a}{b}$ (in voll gekürzter Darstellung):

1. a ist (pos. o. neg.) Teiler von a_0 (dem konstanten Term),
2. b ist (pos. o. neg.) Teiler von a_n (dem Leitkoeffizienten).

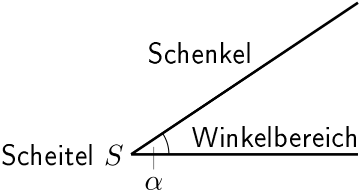
Für $a_n = 1$ sind alle rationalen Nullstellen ganzzahlig und teilen a_0.

4.12 Definition: Rationale Funktionen

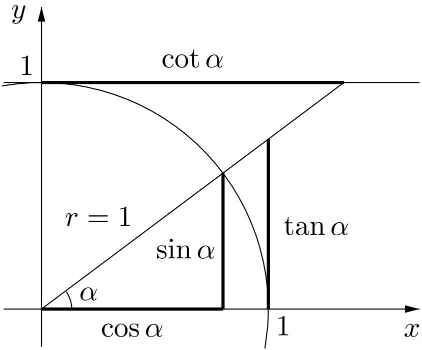
Es seien p und q Polynome. Dann heißt die Funktion f mit Wertebereich $\mathbb{R}$ und Definitionsvorschrift $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion. Ihr Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

- Die Nullstellen des Nennerpolynoms q sind Definitionslücken der rationalen Funktion. Sie können „Löcher“ oder Pole sein:
  - $\dfrac{1}{x}$ hat Pol bei 0,
  - $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ hat keine Definitionslücke,
  - $\dfrac{2x}{x}$ hat eine hebbare Definitionslücke bei 2.
- Bei $\operatorname{grad}(p) \leq \operatorname{grad}(q) + 1$ gibt es Asymptoten bei unendlich.
- Bei $\operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(q)$ kann man Polynomdivision durchführen.
- Den Rest, der Polynomdivision übrig bleibt, kann man mit Partialbruchzerlegung vereinfachen.

Kapitel 5 – Trigonometrie



Winkel werden in <u>Grad</u> oder im <u>Bogenmaß</u> (auch <u>Rad</u>) angegeben: $360° \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$.

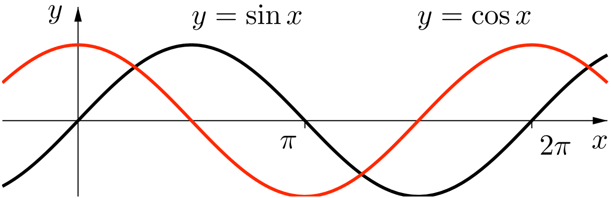


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

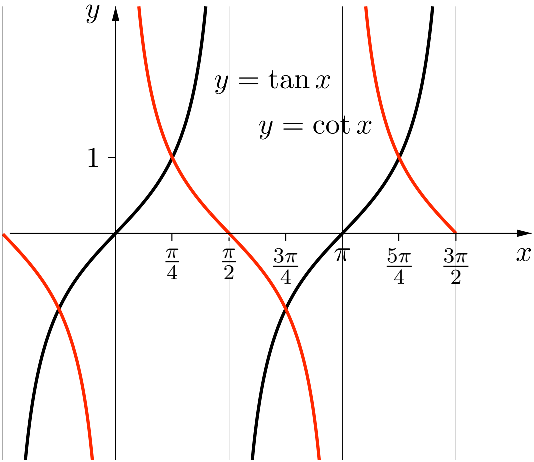
5.1 Definition: Winkelfunktionen

Name		D	W
Sinus	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Cosinus	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Tangens	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Cotangens	$\cot$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

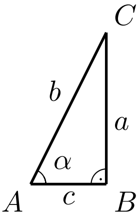
Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktionen / Animation (Wikipedia)



Die Graphen der Tangens- und Cotangensfunktionen:



5.2 Interpretation am rechtwinkligen Dreieck



Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\,, \quad \cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{a}{c}$$

Spezielle Werte der Winkelfunktionen:

x in Grad	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x in Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Eselsbrücke für die Sinus-Werte:

x in Grad	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

5.3 Definition: Periodische Funktionen

Es sei $T > 0$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch, wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.4 Definition: Symmetrie von Funktionen

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall.
Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
2. ... ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$.

5.5 Satz: Eigenschaften der Winkelfunktionen

1. $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch, $\tan$ und $\cot$ sind π-periodisch.
2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$.
3. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.
5. $\cos$ ist eine gerade Funktion,
   und und $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind ungerade Funktionen.
6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$.
7. $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
   $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ der Trigonometrische Pythagoras.
9. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ und $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x}$.

5.6 Einschränkungen der Winkelfunktionen

Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen benutzt man zur Definiton von Umkehrfunktionen:

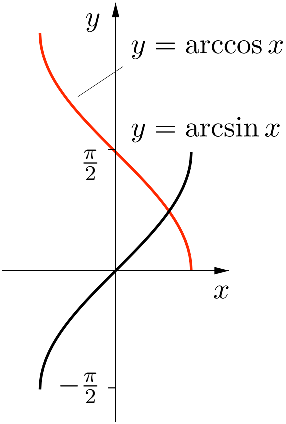
1. $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ ist streng monoton wachsend.
2. $\cos\big|_{[0,\pi]} \colon [0,\pi] \to [-1,1]$ ist streng monoton fallend.
3. $\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
4. $\cot\big|_{(0,\pi)} \colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

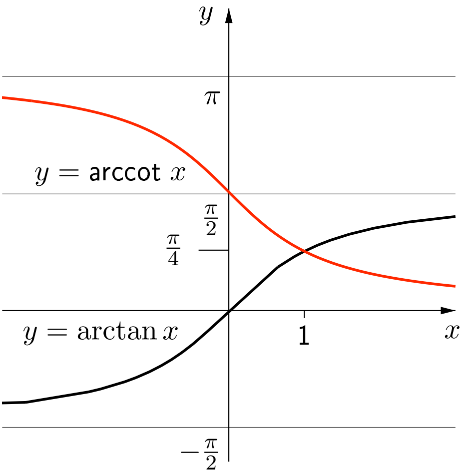
5.7 Definition: Arcusfunktionen

Die Umkehrabbildungen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

1. $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$
3. $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus:





Beim Rechnen mit den Winkelfunktionen sind folgende Additionstheoreme sehr nützlich:

5.8 Satz: Additionstheoreme

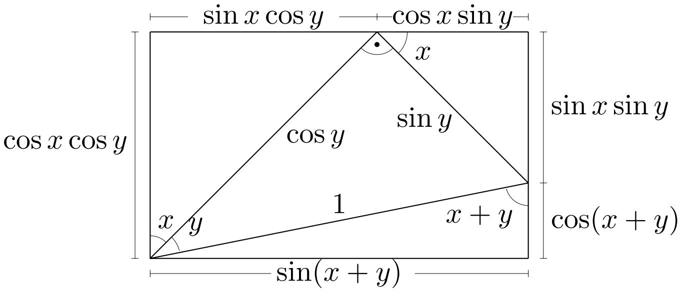
1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man dann

5.9 Folgerung: Doppelte Winkel

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme:



Kapitel 6 – Differenzierbarkeit

Die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit werden in Mathematikvorlesungen genau definiert. Hier sollen lediglich die Ideen verdeutlicht werden.

6.1 Grenzwert und Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}$, und $a \in \mathbb{R}$.

1. Die Funktion g hat in x_0 den Grenzwert a,
   wenn sich für alle $x \in D$ „in der Nähe von x_0“
   die Werte $g(x)$ nur um beliebig wenig von a unterscheiden.

   Dabei wird $g(x_0)$ selbst nicht betrachtet
   (und muss noch nicht einmal definiert sein).

   Schreibweisen: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$ oder $g(x) \to a$ für $x \to x_0$.
2. Die Funktion g nennt man stetig in $x_0 \in D$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.
3. g ist stetig (auf D), wenn g in allen Punkten von D stetig ist.

Beispiele steiger Abbildungen: Wurzelfunktion, Betrag, Winkelfunktionen
Beispiele unstetiger Abbildungen: Funktionen mit Sprungstellen.

6.2 Definition: Differenzierbarkeit

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... differenzierbar in dem Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

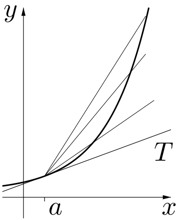
existiert. Dieser Wert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet und heißt die Ableitung von f an der Stelle x_0.

2. ... differenzierbar (auf I), wenn f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Funktion

$$f'\colon I \to \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

die Ableitung von f.

Die Ableitung einer Funktion f kann man geometrisch interpretieren.



Die Steigung der Tangente T im Punkt a ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

6.3 Tangente

Die Gerade mit der Gleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ (kurz auch: Tangente an f in x_0).

6.4 Grundlegende Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}\,,$	$n \in \mathbb{N}$

$f(x)$	$f'(x)$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}\,,$	$n \in \mathbb{N}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet anschaulich,
dass sich die Funktionswerte von f in einer „kleinen Umgebung von x_0"
gut durch die Werte der Tangente annähern lassen.
Man sagt auch: f ist <u>linear approximierbar</u>.

Außerdem gilt: In $x_0 \in I$ differenzierbare Funktionen sind stetig auch stetig in x_0.

6.7 Satz: Differentiationsregeln

Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

1. <u>Vielfache</u> $(cf)' = cf'$
2. <u>Summenregel</u> $(f+g)' = f' + g'$
3. <u>Produktregel</u> $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. <u>Kettenregel</u> $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$
5. <u>Quotientenregel</u> $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (auf $\{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$)

Insbesondere ist

6. $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $(f^2)'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$
8. $(f^n)'(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
9. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ für alle $x \in I$ mit $f(x) \neq 0$.

6.8 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei $f\colon I \to J$ auf dem Intervall I stetig und umkehrbar,
und es gelte $f'(a) \neq 0$ für ein $a \in I$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ differenzierbar in $b := f(a)$,
und es gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Herleitung mit Kettenregel:

$$f\big(f^{-1}(b)\big) = b \implies f'\big(f^{-1}(b)\big) \cdot (f^{-1})'(b) = 1$$

Beispiel: $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin x$,
Umkehrfunktion: $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $y \mapsto \arcsin(y)$.
Für $a \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ist $\sin'(a) = \cos(a) > 0$, also ist für $b := \sin(a) \in (-1,1)$:

$$\arcsin'(b) = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(b)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(b))}} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\,.$$

6.9 Anwendungen

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in (0, \infty)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \infty)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

6.10 Definition: Höhere Ableitungen

1. Ist f auf I differenzierbar, so heißt die Funktion $f'\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.
2. Ist f differenzierbar und f' stetig auf I so nennt man f stetig differenzierbar.
3. Sind f und f' differenzierbar auf I, dann nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f.
4. Ebenso definiert man höhere Ableitungen $f''', f^{(4)}, \ldots$.
5. f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.

Anwendung: Kurvendiskussion für $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq R$

- Nullstellen: $f(x) = 0$, Pole, Asymptoten
- Monotonieverhalten und Extremwerte: $f'(x) = 0$ (oder Randwerte)
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte: $f''(x) = 0$

Kapitel 7 – Anwendungen der Differentialrechnung

7.1 Satz: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei f auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

7.2 Folgerung

Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:

1. Ist $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in]a, b[$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton steigend.
2. Ist $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in]a, b[$, so ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton fallend.
3. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f auf $[a, b]$ konstant.

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden dann mit I bezeichnet).

7.3 Satz: Krümmung

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...

1. ... *linksgekrümmt*, falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$.
2. ... *rechtsgekrümmt*, falls $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.

7.4 Definition: Wendestelle, Wendepunkt

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in I$ und $f''(x)$ habe in x_0 einen Vorzeichenwechsel. Dann heißt x_0 eine *Wendestelle* und der Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ein *Wendepunkt* (des Graphen) von f.

7.5 Definition: Extremum

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (Der Graph von) f hat in x_0 ein ...

1. ...*globales Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2. ...*globales Minimum*, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
3. ...*lokales Maximum*, wenn es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I \cap D$.
4. ...*lokales Minimum*, wenn es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I \cap D$.

Maxima und Minima fassen wir auch unter dem Namen *Extrema* zusammen. Wir nennen x_0 eine *Extremalstelle*, $f(x_0)$ ein *Extremum* und $(x_0, f(x_0))$ einen *Extrempunkt* (des Graphen) von f.

7.6 Satz: Notwendiges Kriterium für Extrema

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Die Umkehrung dieses Satzes ist in der Regel nicht richtig. Das zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$.

Das Phänomen des letzten Beispiels werden wir nun näher beleuchten.

7.7 Satz: Hinreichendes Kriterium für Extrema

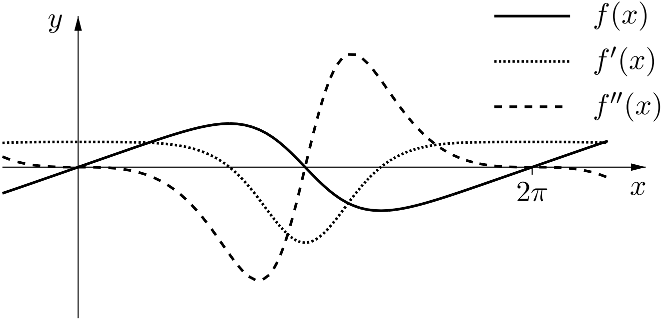
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

1. Ist $f''(x_0) \begin{Bmatrix} < 0 \\ > 0 \end{Bmatrix}$, so hat f in x_0 ein $\begin{Bmatrix} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{Bmatrix}$.
2. Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f in x_0 eine Wendestelle. In diesem Fall spricht man von einem *Sattelpunkt*.

Allgemeiner gilt:

3. Ist $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$, dann gilt
   - Ist n gerade, so hat f in x_0 ein
     $$\begin{cases} \text{lokales Maximum,} & \text{falls } f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \text{lokales Minimum,} & \text{falls } f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}.$$
   - Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. Da die Funktion 2π-periodisch ist, schauen wir sie uns nur auf einem Teilintervall an, nämlich auf $[0, 2\pi]$. (genauer auf $]-\delta, 2\pi + \delta[$, da wir ein offenes Intervall brauchen).



Kapitel 8 – Integralrechnung

8.1 Definition: Stammfunktion

Es seien $f, F\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. F heißt Stammfunktion von f auf I, wenn F auf I differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.
Wenn wir für f eine Stammfunktion suchen, so sagen wir auch:
wir integrieren f.
Wenn f eine Stammfunktion hat, so nennen wir f integrierbar.

8.2 Satz

1. Ist F eine Stammfunktion zu f, so ist auch $G = F + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.
2. Alle Stammfunktionen zu f sind von dieser Form:
   Sind G und F zwei Stammfunktionen von f,
   so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = F(x) + c$.

8.3 Definition: unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral von f und wird mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Ist F eine Stammfunktion zu f, so schreiben wir auch

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

und deuten damit an, dass diese Menge der Stammfunktionen sich aus einer Stammfunktion durch Addieren von Konstanten ergibt.

8.4 Satz: erste Eigenschaften: Linearität

1. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$
2. $\int \big(c \cdot f(x)\big)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$ für $c \in \mathbb{R}$.

8.5 Grundintegrale

Um an unbestimmte Integrale bzw. Stammfunktionen zu kommen, lesen wir die Ableitungstabellen rückwärts:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\; x^{n+1} \; + c \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \quad , \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c \quad , \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$$

Auch die Produkt- und die Kettenregeln kann man rückwärts einsetzen. Seien dazu $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen.

8.6 Satz: Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.7 Beispiele

1. $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$, also $f'(x) = 1$ und $g'(x) = \cos(x)$:

$$\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + c$$

2. Manchmal muss man mehrmals hintereinander partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= x^2(-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

8.8 Satz: Substitution

Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + c.$$

Folgerungen

Es sei F eine Stammfunktion zu f. Dann ist

1. $\displaystyle\int f(x+a)\,\mathrm{d}x = F(x+a) + c$
2. $\displaystyle\int f(a \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(a \cdot x) + c$
3. $\displaystyle\int g(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(g(x)\big)^2 + c$
4. $\displaystyle\int x \cdot f\big(x^2\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot F\big(x^2\big) + c$

8.9 Definition: bestimmtes Integral

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat der Wert $F(b) - F(a)$ für jede Stammfunktion F von f den gleichen Wert. Dieser Wert heißt bestimmtes Integral von f in den Grenzen a und b und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

bezeichnet. Man nennt

f den Integrand,

a die untere Integrationsgrenze,

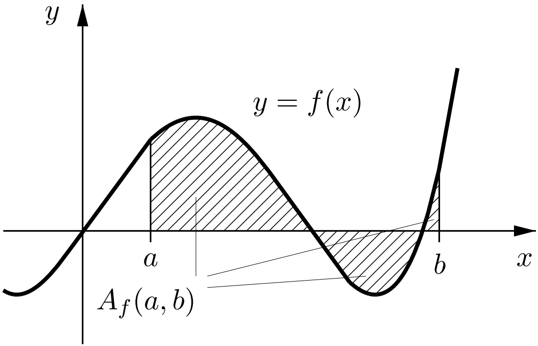
b die obere Integrationsgrenze, und

$[a,b]$ das Integrationsintervall

des Integrals.

8.10 Integral und Flächeninhalt

Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lässt sich als der (orientierte) Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a,b]$ deuten.



8.11 Satz: Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt
$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$
5. Ist $f(x) \leq g(x)$ so ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

8.12 Definition und Satz: geometrischer Flächeninhalt

Es sei f integrierbar. Der geometrische Flächeninhalt $A_f(a,b)$ von f auf dem Intervall $[a,b]$ ist definiert als Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Dieser lässt sich gemäß $A_f(a,b) = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ berechnen.

8.13 Beispiel

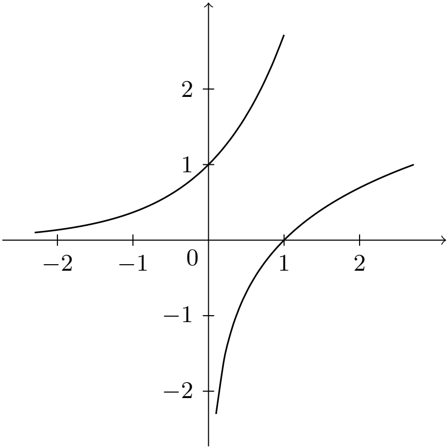
Für $f(x) = x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion. Damit gilt also

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

aber

$$A_f(-1,1) = \int_{-1}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Kapitel 9 – Logarithmus- und Exponentialfunktion



Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ tauchte allerdings in unseren Beispielen zur Differentiation nie als Ergebnis auf. Ihre Stammfunktion kennen wir also bisher noch nicht, und wir definieren deshalb wie folgt:

9.1 Definition: Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion bzw. der natürliche Logarithmus ist definiert als

$$\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

9.2 Satz: Eigenschaften des Logarithmus

Für alle $x, y > 0$ gilt:

1. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $\ln 1 = 0$.
3. Funktionalgleichung: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
4. $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$.
5. $\ln(x^r) = r \ln x$ (für alle $r \in \mathbb{N}_0$, bald auch für alle $r \in \mathbb{R}$).
6. $\ln$ ist streng monoton wachsend und umkehrbar.
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ und $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$.
8. $\ln x \leq x - 1$.

9.3 Definition: Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$
ist die Umkehrfunktion des Logarithmus $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
Die Zahl $e := \exp(1) = \ln^{-1}(1) \approx 2,718281828\ldots$ heißt Eulersche Zahl.

9.4 Satz: Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. $\exp$ ist streng monoton wachsend und umkehrbar, und $\exp(x) \geq x + 1$.
2. $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$.
3. $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) > 0$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
5. Funktionalgleichung: $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$,
6. $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ (für alle $r \in \mathbb{N}_0$, gleich auch für alle $r \in \mathbb{R}$).
7. $\exp'(x) = \exp(x)$.
8. $\displaystyle\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + c$.

Satz 9.4 Punkt 6. besagt im Spezialfall $x = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$:

$$\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r.$$

9.5 Definition: allgemeine Potenz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die allgemeine Potenz a^b durch

$$a^b := \exp(b \ln a).$$

a heißt Basis, b ist der Exponent.

9.6 Rechenregeln für die Potenzen $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a, c > 0)$

1. Negative Exponenten: $a^{-b} = (\frac{1}{a})^b = \frac{1}{a^b}$.
2. Wurzeln sind Potenzen: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$.
3. Potenzgesetze: $a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b, \quad a^b \cdot a^d = a^{b+d}, \quad (a^b)^c = a^{bc}$.
4. Ableitung nach Basis $(x > 0)$: $(x^b)' = bx^{b-1}$.
5. Ableitung nach Exponent: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Logarithmus und allgemeine Potenzen erweitern unsere Integrationsregeln:

9.7 Satz: Integral mit Logarithmus und Potenzen

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$
2. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$
3. $\displaystyle\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ (für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).
4. $\displaystyle\int r^x\,\mathrm{d}x = \frac{r^x}{\ln r} + c$ (für alle $r \in (0,\infty) \setminus \{1\}$).

Kapitel 10 – Aussagenlogik und Beweistechniken

Kapitel 10 – Aussagenlogik und Beweistechniken

10.1 Definition: Aussage, Wahrheitswerte

Eine Aussage ist ein feststellender Satz, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) zugeordnet werden kann.

Statt „wahr“ sagt man auch „richtig“ oder „gilt“ oder „trifft zu“.

Beispiele

- Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade. (falsch, Punkte müssen nicht verschieden sein)
- Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt. (falsch, beachte parallele Geraden)
- Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt. (wahr)
- Jede Funktion hat eine Stammfunktion. (falsch)
- Jede stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion. (wahr)

Es gibt eine Reihe von Operationen für Aussagen.

10.2 Definition: Operationen auf Aussagen: Junktoren

Für Aussagen A, B kennt man folgende Operationen, die zu neuen „zusammengesetzten" Aussagen führen:

Negation:	**nicht** A	Symbol:	$\neg A$.
Konjunktion:	A **und** B	Symbol:	$A \wedge B$.
Disjunktion:	A **oder** B	Symbol:	$A \vee B$.
Implikation:	**Aus** A **folgt** B	Symbol:	$A \Rightarrow B$.

Ein Folgebegriff ist die

Äquivalenz: A **ist äquivalent (zu)** B Symbol: $A \Leftrightarrow B$.
Definiert als: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Die Symbole werden oft nicht benutzt.
Stattdessen drückt man die Zusammenhänge sprachlich aus.

Die neuen Aussagen, die sich aus den Operationen ergeben, werden streng durch Wahrheitstabellen definiert.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

10.4 Bemerkungen

- Z. B. ist „A oder B" wahr, wenn zumindest eine der Aussagen A, B wahr ist, und es ist falsch, wenn beide Aussagen A, B falsch sind.
- Das „Oder" meint hier nicht „entweder … oder" (lat.: „aut"), sondern ist ein einschließendes Oder (lat.: „vel" – daher das Symbol!)
- Das „Und" zwischen Aussagen wird zuweilen nur als Komma geschrieben, z. B. in $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, x \leq 2\}$.
- Fast jeder Satz der Mathematik hat die Struktur „$A \Rightarrow B$", wobei
  - A die Voraussetzung (auch Prämisse) des Satzes bezeichnet,

    aus der man
  - die Behauptung (auch Konklusion) B

    folgern kann.
- Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr, aber B falsch ist. Zum Beweis der Richtigkeit der Aussage „$A \Rightarrow B$" darf man daher voraussetzen, dass A wahr ist, und muss nun mit logischen Schlüssen die Richtigkeit von B folgern (Direkter Beweis).

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Für „$A \Rightarrow B$“ gibt es neben „**Aus** A **folgt** B“ weitere Sprechweisen:
  - B gilt, wenn A gilt,
  - A ist hinreichend für B,
  - B ist notwendig für A.
- Für „$A \Leftrightarrow B$“ gibt es neben „A **äquivalent** B“ weitere Sprechweisen:
  - A gilt dann und nur dann, wenn B gilt,
  - A gilt genau dann, wenn B gilt,
  - A ist notwendig und hinreichend für B.
- **Anfängerfehler:** Logische Operatoren zwischen ausrechenbaren Termen oder algebraischen Ausdrücken:

  Unsinnig: $x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1)$,

  Unsinnig: $x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \vee -1$,

  Sinnig: $x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -1$.
- **Anfängerfehler:** Aus der Tatsache, dass „$A \Rightarrow B$“ und B richtig ist, wird geschlossen, dass A richtig ist.

10.5 Satz: Rechenregeln für Junktoren

Es seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

1. Kommutativität von Konjunktion und Disjunktion:
$$A \vee B \iff B \vee A$$
$$A \wedge B \iff B \wedge A$$
2. Assoziativität von Konjunktion und Disjunktion:
$$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$$
3. Distributivität:
$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
4. de Morgansche Regeln:
$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$
5. Doppelte Verneinung:
$$\neg(\neg A) \iff A$$

10.6 Mengen und Aussagen

Man beachte dabei die komplette Analogie von 1. bis 4. zu den entsprechenden Aussagen über Mengenoperationen.
Das verwundert nicht, denn:

- $\cup$ korrespondiert mit $\vee$,
- $\cap$ korrespondiert mit $\wedge$,
- Differenzbildung gegenüber einer Obermenge N korrespondiert mit $\neg$:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$
$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$
$$N \setminus M = \{x \in N \mid \neg(x \in M)\}$$

An sich benötigt man für Aussagenlogik nur zwei Operatoren $\vee$ und $\neg$, denn die anderen lassen sich „emulieren“, d. h. nachbilden:

10.7 Satz: Reduktion der Junktoren

Es seien A, B Aussagen. Dann gilt:

1. $(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg A \vee B)$
2. $(A \wedge B) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(\neg A \vee \neg B)$

Zweiteres folgt mit der zweiten der de Morganschen Regeln und $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, Ersteres prüft man z. B. mit einer Wahrheitstafel.

10.8 Definition: Aussageform, Operationen auf Aussageformen: Quantoren

Eine Aussageform ist auf einer Menge G definierte Abbildung, die jedem $x \in G$ eine Aussage $A(x)$ zuordnet (die in Abhängigkeit von x wahr oder falsch sein kann). Es gibt zwei Operationen „$\forall$", den Allquantor und „$\exists$", den Existenzquantor, die Aussageformen zu Aussagen machen:

- Für alle $x \in G$ gilt $A(x)$. Symbol: $\forall\, x \in G\colon A(x)$,
- Es gibt ein $x \in G$, so dass $A(x)$ gilt. Symbol: $\exists\, x \in G\colon A(x)$.

Bemerkung

Es sei A eine Aussageform über G. Dann gilt

1. A ist erfüllbar $\iff$ $\exists x \in G\colon A(x)$.
2. A ist nicht erfüllbar $\iff$ $\forall x \in G\colon \neg A(x)$.
3. A ist allgemeingültig $\iff$ $\forall x \in G\colon A(x)$.
4. A ist nicht allgemeingültig $\iff$ $\exists x \in G\colon \neg A(x)$.

Sprechweisen und Bemerkungen:

- Erinnerung: „gilt“ ist ein Synonym für „ist wahr“.
- Statt „für alle“ kann man auch „für jedes“ sagen.
- Statt „es gibt ein“ kann man auch „es existiert ein“ sagen. Man meint damit: „es gibt mindestens ein“.
- Will man ausdrücken, dass es „genau ein x“ gibt, so dass $A(x)$ richtig ist, so schreibt man: $\exists!\, x \in M : A(x)$.
- Schlechter Stil ist es, Quantoren hinten anzusetzen: $A(x)\ \forall\, x \in M$.

Oft kann man Widerspruchsbeweise führen, also die Negation einer mit Allquantor oder Existenzquantor beginnenden Aussage zu einem Widerspruch führen. Nötig dazu ist die formale Negation solcher Aussagen:

10.11 Satz: Negation von Quantoren

Es gilt:

1. $\neg\big(\exists x \in G\colon A(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in G\colon \neg A(x)$
2. $\neg\big(\forall x \in G\colon A(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in G\colon \neg A(x)$

Was passiert nun, wenn man mehrere Quantoren benötigt, um eine Aussageform zu notieren?

- Stehen Quantoren in Reihung, so verzichtet man auf Doppelpunkte.
- Gleiche Quantoren, die nebeneinander stehen, lassen sich vertauschen, ohne dass sich die Aussage ändert.
- Der Tausch unterschiedlicher Quantoren verändert die Aussage völlig:

10.12 Beispiel: Vertauschen von Quantoren

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} \colon n > x.$
   D. h.: Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > x$.

   Diese Aussage ist wahr, denn:
   Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle dann $n = |\lceil x \rceil| + 1 \in \mathbb{N}$, wobei $\lceil x \rceil$ die obere Gauß-Klammer von x ist, also die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Es ist $n > x$. $\square$
2. $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \colon n > x.$
   Wörtlich: Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für jede reelle Zahl x gilt: $n > x$.

   Diese Aussage ist falsch: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x := n + 1 \in \mathbb{R}$ und $x > n$.

10.13 Indirekter Beweis oder Widerspruchsbeweis

Für Aussagen A, B gilt

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(\neg B \wedge A)$$

Um einen Satz „$A \Rightarrow B$“ zu beweisen, kann man gleichwertig ...

- ... „$\neg B \Rightarrow \neg A$“ prüfen. Man nimmt also an, dass B nicht richtig wäre und versucht daraus abzuleiten, dass dann auch A nicht richtig ist. Diese Beweisform heißt <u>indirekt</u> oder Beweis durch <u>Kontraposition</u>.
- ... „$\neg(\neg B \wedge A)$“ prüfen, also annehmen, dass B nicht richtig und A richtig ist, um dies zu einem Widerspruch zu einer dieser beiden Annahmen oder einer (ggfs. hieraus abgeleiteten) wahren Aussage zu führen. Diese Beweisform heißt <u>Widerspruchsbeweis</u>.

Hat man einfach einen Beweis einer Aussage A und nicht einer Implikation $A \Rightarrow B$ zu erbringen, so kann man auch $\neg A$ annehmen, um dies zu einem Widerspruch zu $\neg A$ oder einer (ggfs. hieraus abgeleiteten) wahren Aussage zu führen. Auch dies ist ein <u>Widerspruchsbeweis</u>.

10.14 Beispiele für Beweisformen

- Direkt: Aussage: $10|n \Rightarrow 5|n$.
  Beweis: Gelte $10|n$. Dann ist $m := \frac{n}{10} \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $n = 5 \cdot (2m)$. Mit $m \in \mathbb{N}$ auch $2m \in \mathbb{N}$, also: $5|n$ $\square$
- Indirekt: Aussage: (p Primzahl und $p > 2$) $\Rightarrow p$ ungerade.
  Beweis: Sei p gerade, d. h. $2|p$. Dann ist p keine Primzahl oder gleich 2, und somit auch kleiner gleich 2. Also ist die Negation der Aussage (p Primzahl und $p > 2$) richtig. $\square$
- Widerspruch: Aussage: $a^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a$ nicht rational.
  Beweis durch Widerspruch: Sei a rational mit $a^2 = 2$. Dann ist $a = p/q$, wobei man $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd wählen kann. Damit erhalten wir $p^2 = 2q^2$, und daraus, dass p gerade ist. Dann ist aber p^2 durch 4 teilbar. Es folgt, dass q ebenfalls gerade ist. Widerspruch! $\square$
- Widerspruch: Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
  Hier handelt es sich um eine nicht als Implikation formulierte Aussage.

- Widerspruch: Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
  Beweis durch Widerspruch: Sei die Zahl der Primzahlen endlich, d. h. die Primzahlmenge besteht aus n Zahlen $p_1, \ldots, p_n$. Betrachte die Zahl $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$. Diese Zahl ist durch keine Primzahl p_j aus der Liste teilbar, denn bei der Teilung ergibt sich stets der Rest 1. Damit kann die Menge der Primzahlen nicht vollständig sein. $\square$

Wie zu sehen ist, gibt man Beweisen gerne eine Verpackung mit:

Am Anfang steht z. B. eine einleitende Floskel, wie „Beweis:“ oder einfach „Denn:“ etc. Am Ende zeigt man an, dass die Beweisführung nun komplett ist. Dazu schreibt man gerne ein Quadrat $\square$ oder aber „q. e. d.“ (lat.: quod erat demonstrandum = was zu zeigen war).

Bei nicht direkten Beweisen ist es sinnvoll, zu Beginn auch die Beweisform beim Namen nennen.

Oft will man in der Mathematik bestimmte Aussagen widerlegen. Dies geschieht in der Regel durch Angabe eines Beispiels, bei der die zu widerlegende Aussage falsch ist.

10.15 Beispiel: Widerlegen von Behauptungen durch ein Gegenbeispiel

1. **Behauptung**: Jede ganze Zahl ist gerade.
   Diese Aussage ist falsch, denn 3 ist eine ganze Zahl (erfüllt also die Voraussetzung), ist aber nicht gerade.
2. **Behauptung**: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq x$.
   Falsch, denn für $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ ist $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$.
3. **Behauptung**: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.
   Die Aussage ist falsch, denn für $n = 41$ gilt
   $41 \mid 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 1 + 1)$

Kapitel 11 – Vollständige Induktion

Stellt man Dominosteine in einer Reihe so auf, dass ein jeder in der Reihe den Nachfolger umkippt, wenn er selbst zum Kippen gebracht wird, fällt die ganze Reihe, falls wir nur den ersten Stein in der Reihe umkippen.

Wir sehen den Dominoeffekt ein, wenn die Gültigkeit der beiden Aussagen

1. Erster Stein kippt,
2. Für alle n gilt: Kippt der n-te Stein, so auch der $(n+1)$-te Stein.

gegeben ist.

Ganz ähnlich wie eine solche Dominoreihe (nur ohne Ende) sind die natürlichen Zahlen: Beginnt man bei 1 und zählt man immer 1 weiter, so gelangt man in dieser Weise zu jeder natürlichen Zahl. Man stelle sich nun eine Aussageform $A(n)$ vor, die für jede natürliche Zahl n eine Aussage liefert, z. B. $\quad A(n)\colon \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Gelingt der Nachweis, dass $A(1)$ richtig ist und kann weiter gezeigt werden, dass aus der angenommenen Gültigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auch die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist das Prinzip der vollständigen Induktion:

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage. Gelten die beiden Aussagen

1. $A(1)$ (Induktionsanfang oder Induktionsanker)
2. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (Induktionsschluss oder Induktionsschritt),

so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

1. Formal deutet man den Induktionsanfang z. B durch ein Kürzel wie „IA“ an, den Induktionsschluss z. B. durch „IS“.
2. Im Induktionsschluss verwendet man ja die Induktionsannahme, nämlich, dass $A(n)$ gilt. An der Stelle, an der dies geschieht, ist der Hinweis darauf (z. B. durch „Ind.ann.“ oder „IV“) sinnvoll.
3. Statt $\mathbb{N}$ darf man unter Bemühung der gleichen Anschauung jeden bei einer ganzen Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnenden Abschnitt $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ der ganzen Zahlen für die Induktion zugrundelegen:

Gelten die beiden Aussagen

1. $A(n_0)$ (Induktionsanfang oder -anker)
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : \quad A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (Induktionsschluss),

so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

11.1 Beispiele: Summen, Gleichungen

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. Es gilt $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

11.2 Beispiele: Ungleichungen

6. Es sei $x > -1$ eine feste reelle Zahl. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

   $(1+x)^n \geq 1 + nx$
7. Ist $x \neq 0$ so gilt 7. mit „$>$“ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
8. Es sei $p \geq 2$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p^n \geq n$.
9. Es sei $p \geq 3$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p^n \geq n^2$.
10. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.
11. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Beispiele: Teilbarkeit

12. 3 teilt $13^n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
13. 3 teilt $2^{2n+1} + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
14. 6 teilt $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

11.3 Beispiele: Ableitungen

15. Es ist $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
16. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ist $f(x) = x^n$, dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.
17. Es sei $f(x) = e^{-x^2}$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom p_n vom Grad n, so dass $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$.
18. Es sei $f(x) := \dfrac{1}{ax+b}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
19. Es sei $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)$.
20. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Wo ist der Fehler in dem folgenden Induktionsbeweis:

Behauptung: In jedem Hörsaal mit n Studierenden haben alle Studierenden das selbe Geschlecht.

Beweis mit Induktion:
$(n = 1)$: Ist nur ein Studi im Raum, ist die Behauptung klar.
$(n \to n + 1)$: Angenommen wir haben einen Raum mit $n + 1$ Studis. Man schicke einen Studi raus, die übrigen n müssen dann nach IV das selbe Geschlecht haben. Man hole den ersten Studi zurück und schicke einen anderen heraus. Die übrigen n haben nun wieder alle das selbe Geschlecht, damit stimmt das Geschlecht des zuerst rausgeschickten Studis mit dem der restlichen überein. Also haben alle $n + 1$ Studis das selbe Geschlecht.

Eine in der Mathematik sehr bekannte Folge ist die Folge der Fibonacci Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei ist $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ und jede weitere Fibonacci-Zahl ergibt sich aus der Summe der beiden vorangegangenen Zahlen, das heißt es ist $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
Die ersten Fibonacci Zahlen sind:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Zeigen Sie: Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci Folge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n genau dann durch 3 teilbar, wenn n durch 4 teilbar ist.