

MATHEMATIK VORKURS NAT-ING I – BLATT 12

THEMENGEBIET: VEKTOREN

Aufgabe 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

- $(3, \sqrt{7}, -5)^T$ und $(0, 0, 0)^T$ im \mathbb{R}^3 .
- $(1, 2, 3)^T$ und $(4, 5, 6)^T$ im \mathbb{R}^3 .
- $(1, t)^T$ und $(t, 4)^T$ im \mathbb{R}^2 , wobei $t \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben sei.

Aufgabe 2)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = (4, 0, 3)^T$ und $\vec{v} = (2, -1, 2)$.

- Bestimmen Sie $\|\vec{u}\|$ und $\|\vec{v}\|$.
- Was gibt $\|u - v\|$ an?
- Berechnen Sie den Winkel ψ zwischen \vec{u} und \vec{v} .
- Welcher Vektor mit Länge 1 zeigt in dieselbe Richtung wie \vec{v} ?
- Finden Sie zwei verschiedene Vektoren $\vec{a} \neq \vec{b}$, die beide senkrecht auf \vec{u} stehen.
- Wie sieht die Menge $\{\vec{c} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} \cdot \vec{v} = 0\}$ geometrisch aus?

Aufgabe 3)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (0, 0, 1)^T$, $\vec{b} = (0, s, t)^T$, $c = (c_1, c_2, c_3)^T$ und $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$, wobei $s, t, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben seien. Zeigen Sie die "Lagrange-Identität":

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Aufgabe 4)

Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, wobei

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5)

- a) Wie groß ist die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{v} = (-3, 2, 1)^T$ und $\vec{w} = (5, -3, 2)^T$ aufgespannt wird?
- b) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (6, -5, 6)$, $B = (-2, 9, -2)$ und $C = (5, 2, 1)$?