

## MATHEMATIK VORKURS NAT-ING I – BLATT 12

### THEMENGEBIET: VEKTOREN

#### Aufgabe 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

- $(3, \sqrt{7}, -5)^T$  und  $(0, 0, 0)^T$  im  $\mathbb{R}^3$ .
- $(1, 2, 3)^T$  und  $(4, 5, 6)^T$  im  $\mathbb{R}^3$ .
- $(1, t)^T$  und  $(t, 4)^T$  im  $\mathbb{R}^2$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$  fest vorgegeben sei.

#### Aufgabe 2)

Gegeben seien die Vektoren  $\vec{u} = (4, 0, 3)^T$  und  $\vec{v} = (2, -1, 2)$ .

- Bestimmen Sie  $\|\vec{u}\|$  und  $\|\vec{v}\|$ .
- Was gibt  $\|u - v\|$  an?
- Berechnen Sie den Winkel  $\psi$  zwischen  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ .
- Welcher Vektor mit Länge 1 zeigt in dieselbe Richtung wie  $\vec{v}$ ?
- Finden Sie zwei verschiedene Vektoren  $\vec{a} \neq \vec{b}$ , die beide senkrecht auf  $\vec{u}$  stehen.
- Wie sieht die Menge  $\{\vec{c} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} \cdot \vec{v} = 0\}$  geometrisch aus?

#### Aufgabe 3)

Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a} = (0, 0, 1)^T$ ,  $\vec{b} = (0, s, t)^T$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)^T$  und  $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ , wobei  $s, t, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$  fest vorgegeben seien. Zeigen Sie die "Lagrange-Identität":

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Aufgabe 4)

Bestimmen Sie alle Vektoren  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ , wobei

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Aufgabe 5)

- a) Wie groß ist die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren  $\vec{v} = (-3, 2, 1)^T$  und  $\vec{w} = (5, -3, 2)^T$  aufgespannt wird?
- b) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten  $A = (6, -5, 6)$ ,  $B = (-2, 9, -2)$  und  $C = (5, 2, 1)$ ?