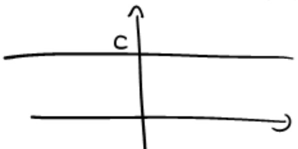
Aufgabe: Für welches $q \in \mathbb{R}$ ist $x=-3$ Lsg der Gleichung $x^2+6x+q=0$?

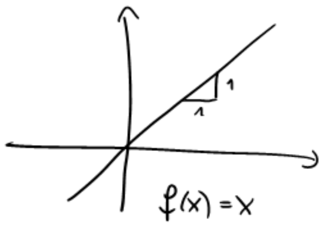
Lsg: $(-3)^2+6\cdot(-3)+q=0 \iff \underbrace{9-18}_{=-9}+q=0 \iff q=9.$

Bem: $x^2+6x+9=(x+3)^2=0 \iff x=-3$

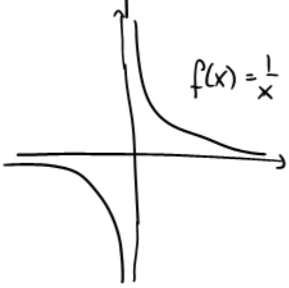
zu 7.4

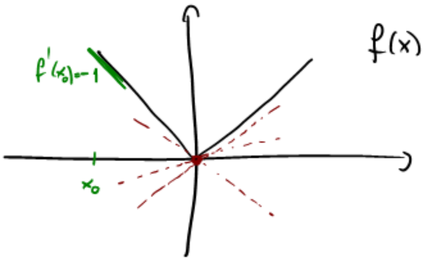


$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{h}=\frac{h}{h}=1$$

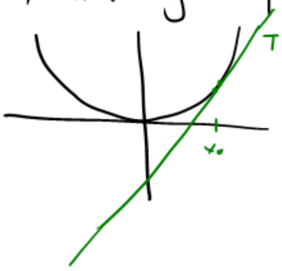




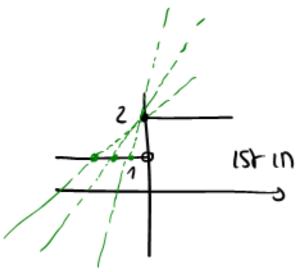
$f(x)=|x|$

Achtung: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar!!

Für die Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|^2$ gilt $f(x)=|x|^2=x^2$ und damit ist f differenzierbar.



zu 7.5



ist in $x_0=0$ nicht diffbar, da nicht stetig.

Achtung: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ zwar stetig, aber nicht diffbar.

zu Satz 7.6

- $(4x^2)'=4\cdot(x^2)'=4\cdot 2x=8x$
- $(x+x^3)'=(x)'+(x^3)'=1+3x^2$
- $(\underbrace{\sin x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g})'=\underbrace{(\sin x)'}_{\cos x}\cdot\cos x+\sin x\cdot\underbrace{(\cos x)'}_{-\sin x}=\cos^2 x-\sin^2 x$
- $\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)'=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

zu 7.7

- $h(x)=\sin(x^2)$. Es gilt: $\sin(x^2)=(f\circ g)(x)$ mit $f(y)=\sin y$, $g(x)=x^2$
  Es gilt daher: $h'(x)=(\sin(x^2))'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\underbrace{\cos(x^2)}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{2x}_{g'(x)}=2x\cos(x^2)$
- $h(x)=(\sin x)^2$. Es gilt $(\sin x)^2=(f\circ g)(x)$ mit $f(y)=y^2$, $g(x)=\sin x$ mit $f'(y)=2y$, $g'(x)=\cos x$
  Es gilt daher: $h'(x)=(\sin^2 x)'=f'(g(x))\cdot g'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$

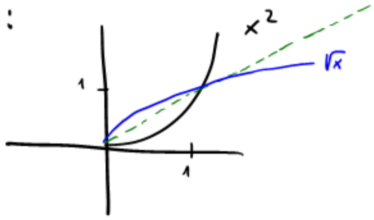
Bsp: $\frac{1}{f(x)} = (g \circ f)(x)$ mit $g(y) = \frac{1}{y}$ und $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$

Mit Kettenregel: $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

zur Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right)$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Umkehrfkt:



$f: (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ hat die Umkehrfkt $f^{-1}: (0,\infty) \to (0,\infty)$, $y \mapsto \sqrt{y}$.

Es gilt $f'(x) = (x^2)' = 2x > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$, also

$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x})} = \frac{1}{2 \cdot f^{-1}(y)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$$

Bsp. nach 7.8: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \overset{\cos x > 0}{\Longrightarrow} \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Bem: $(\underbrace{x^{\frac{1}{n}}}_{\sqrt[n]{x}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{n-1})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$