Kapitel 10 – Logarithmus- und Exponentialfunktion

Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ tauchte allerdings in unseren Beispielen zur Differentiation nie als Ableitung auf.

Definition 10.1 (Logarithmusfunktion)

Die Logarithmusfunktion *(bzw. der* natürliche Logarithmus*) ist definiert als*

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\, .$$

Satz 10.2 (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Für die Ableitung der Logarithmusfunktion gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Satz 10.3 (Eigenschaften des Logarithmus)

Für alle $x, y > 0$ *gilt:*

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
3. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
4. $\ln(x^r) = r \ln x$ *(für alle* $r \in \mathbb{N}_0$*, später auch für alle* $r \in \mathbb{R}$*).*
5. $\ln$ *ist streng monoton steigend und besitzt eine Umkehrfunktion.*
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$.

Definition 10.4 (Exponentialfunktion)

Die EXPONENTIALFUNKTION $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist als die Umkehrfunktion des Logarithmus* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definiert.*

Die Zahl $e := \exp(1) \approx 2,718281828\ldots$ *heißt* EULERSCHE ZAHL.

Satz 10.5 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

1. $\exp$ *ist streng monoton wachsend.*
2. $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$.
3. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
4. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
5. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$.
6. $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ *(für alle* $r \in \mathbb{N}_0$*, später auch für alle* $r \in \mathbb{R}$*).*
7. $\exp'(x) = \exp(x)$.

Bemerkung 10.6

Satz 10.5, Punkt 6. besagt im Spezialfall $x = 1$ *und* $r \in \mathbb{N}_0$ *bzw.* $r \in \mathbb{R}$*:*

$$\exp(r) = \exp(1)^r = e^r.$$

Definition 10.7 (allgemeine Potenz)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a > 0$ *definieren wir die allgemeine Potenz* a^b *durch*

$$a^b := \exp(b \ln a)\,.$$

a ***heißt*** $\textsc{Basis}$*,* b *ist der* $\textsc{Exponent}$*.*

10. Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c > 0$ gilt:

1. Negative Exponenten: $a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}$.
2. Wurzeln: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.
3. Potenzgesetze:
$$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b, \quad a^b \cdot a^d = a^{b+d}, \quad (a^b)^d = a^{b \cdot d}.$$
4. Ableitung nach Basis: Für $x > 0$ gilt
$$(x^b)' = bx^{b-1}.$$
5. Ableitung nach Exponent: $(a^x)' = a^x \ln a$

   Nach der Kettenregel gilt nämlich
$$(a^x)' = (\exp(x \ln a))' = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenzen erweitern unsere Integrationsregeln:

Satz 10.8

1. $\int \exp(x)\,dx = \exp(x) + c.$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c.$
4. $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$ *(für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).*
5. $\int r^x\,dx = \frac{r^x}{\ln r} + c$ *(für alle $r \in (0,\infty) \setminus \{1\}$).*