Kapitel 13 – Aussageformen

Definition 13.1 (Aussageformen)

Eine AUSSAGEFORM A *über einer Menge* G *ist eine Abbildung, die jedem* $x \in G$ *eine Aussage* $A(x)$ *zuordnet.*

Bemerkung: Die Aussage $A(x)$ kann in Abhängigkeit von x wahr oder falsch sein.

Beispiele:

- Sei $G := \mathbb{N}$ und A die Aussageform, die jedem $x \in G$ die folgende Aussage $A(x)$ zuordnet: "x ist gerade". Dann ist $A(2)$ eine wahre, aber $A(7)$ eine falsche Aussage.
- Sei $G := \mathbb{R}$ und A die Abbildung, die jedem $x \in G$ die Behauptung " $\frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$" zuordnet. Dann ist A keine Aussageform. Beim Einsetzen von $x = 0$ muss nämlich der nicht definierte Ausdruck $\frac{2}{0}$ gebildet werden. Daher ist $A(0)$ keine Aussage.

Es gibt zwei Operationen, die Aussageformen zu Aussagen machen.

Definition 13.2 (Quantoren)

Sei A eine Aussageform über einer Menge G. Der ALLQUANTOR *"$\forall$" und der* EXISTENZQUANTOR *"$\exists$" ist durch die folgenden Aussagen definiert:*

- *Für alle $x \in G$ gilt $A(x)$.* *Symbol:* $\forall x \in G: \ A(x)$,
- *Es gibt ein $x \in G$, so dass $A(x)$ gilt.* *Symbol:* $\exists x \in G: \ A(x)$.

Definition 13.3 (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Sei A eine Aussageform über G. Dann heißt A...

1. ...ERFÜLLBAR, *wenn* $\exists x \in G: \ A(x)$.
2. ...NICHT ERFÜLLBAR, *wenn* $\forall x \in G: \neg A(x)$.
3. ...ALLGEMEINGÜLTIG, *wenn* $\forall x \in G: \ A(x)$.
4. ...NICHT ALLGEMEINGÜLTIG, *wenn* $\exists x \in G: \neg A(x)$.

13. Sprechweisen und Bemerkungen

1. Das Wort "gilt" ist ein Synonym für "ist wahr".
2. Statt "für alle" sagt man auch "für jedes".
3. Statt "es gibt ein" sagt man auch "es existiert (mindestens) ein".
4. Will man ausdrücken, dass es "genau ein x" gibt, so dass $A(x)$ gilt, so schreibt man:
$$\exists!\, x \in G :\ A(x).$$
5. Schlechter Stil ist es, Quantoren hinter $A(x)$ zu schreiben, z.B.
$$A(x) \quad \forall x \in G.$$
Trotzdem kommt diese Schreibweise häufiger vor.

Häufiger muss die Negation einer mit Allquantor oder Existenzquantor beginnenden Aussage gebildet werden.

Satz 13.4 (Negation von Quantoren)

Es gilt:

1. $\neg\big(\exists x \in G : A(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in G : \neg A(x)$
2. $\neg\big(\forall x \in G : A(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in G : \neg A(x)$

Beispiele:

- $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \; x^2 = 15) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \; x^2 \neq 15.$
  Diese negierte Aussage ist wahr, da die Gleichung $x^2 = 15$ keine ganzzahlige Lösung besitzt.
- $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 > 4 \Rightarrow x > 2) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \; (x^2 > 4 \wedge x \leq 2).$
  Diese Negierte Aussage ist wahr, da für $x = -4$ tatsächlich $x^2 = 16 > 4$ und $x = -4 \leq 2$ gilt.

13. Aussagen mit mehreren Quantoren

Enthalten Aussagen mehrere Quantoren, so ist Folgendes zu beachten:

- Stehen Quantoren in Reihung, so verzichtet man oft auf Doppelpunkte.
- Gleiche Quantoren, die nebeneinander stehen, sind vertauschbar, ohne dass sich die Aussage ändert.
- Das Vertauschen unterschiedlicher Quantoren ändert die Aussage.

Beispiel 13.5 (Vertauschen von Quantoren)

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ *ist wahr, denn:*

   Sei $x \in \mathbb{R}$ *beliebig. Wähle dann* $n := |\lceil x \rceil| + 1 \in \mathbb{N}$, *wobei* $\lceil x \rceil$ *die obere Gauß-Klammer von* x *(kleinste ganze Zahl* $\geq x$*) bezeichnet. Dann ist* $n > x$.
2. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : n > x$ *ist falsch, denn:*

   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *ist* $x := n + 1 \in \mathbb{R}$ *und* $x > n$.

13. Typische Anfängerfehler

1. Der Existenzquantor $\exists$ wird als "es existiert genau ein" gedeutet: Die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{R}: \quad x^2 = 16$$

ist wahr. Das zugehörige x ist aber nicht eindeutig, da sowohl $4^2 = 16$ als auch $(-4)^2 = 16$ gilt. Die Aussage

$$\exists!\, x \in \mathbb{R}: \quad x^3 = 16$$

ist daher falsch.

2. Falsche Negation von Aussagen mit Quantoren:

$$\neg(\exists\, x < 0:\; x^2 = 4) \not\Leftrightarrow \exists\, x < 0 : x^2 \neq 4.$$

Tatsächlich ist die Aussage $\exists\, x < 0:\; x^2 = 4$ wahr (wähle $x = -2$) und die Negation daher falsch. Die Aussage $\exists\, x < 0 : x^2 \neq 4$ ist aber wahr (wähle $x = -3$).