Kapitel 8 – Anwendungen der Differentialrechnung

Satz 8.1 (Monotonieverhalten)

Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

1. *Ist $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton steigend.*
2. *Ist $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton fallend.*
3. *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf $[a,b]$ konstant.*

Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{1-x}$ ist auf $[0,1]$ stetig und streng monoton fallend, da

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

- $f(x) = x^2$ ist auf $[0,1]$ stetig mit

$$f'(x) = 2x > 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Damit ist f auf $[0,1]$ streng monoton steigend.

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden mit I bezeichnet).

Definition 8.2 (Krümmung)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...

1. ... LINKSGEKRÜMMT, *falls $f'' > 0$ für alle $x \in I$.*
2. ... RECHTSGEKRÜMMT, *falls $f'' < 0$ für alle $x \in I$.*

Definition 8.3 (Wendestelle, Wendepunkt)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in I$ und $f''(x)$ habe in x_0 einen Vorzeichenwechsel. Dann heißt x_0 eine WENDESTELLE *und der Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ein* WENDEPUNKT *(des Graphen) von f.*

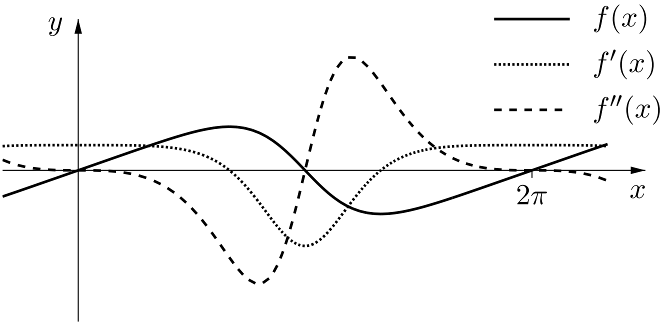
Definition 8.4 (Extremum)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ *eine beliebige Teilmenge,* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D$. *(Der Graph von)* f *hat in* x_0 *ein ...*

1. ...GLOBALES MAXIMUM, *wenn* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* $x \in D$.
2. ...GLOBALES MINIMUM, *wenn* $f(x) \geq f(x_0)$ *für alle* $x \in D$.
3. ...LOKALES MAXIMUM, *wenn es ein offenes Intervall* $I \subset D$ *mit* $x_0 \in I$ *gibt, so dass* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* $x \in I$.
4. ...LOKALES MINIMUM, *wenn es ein offenes Intervall* $I \subset D$ *mit* $x_0 \in I$ *gibt, so dass* $f(x) \geq f(x_0)$ *für alle* $x \in I$.

Maxima und Minima fassen wir auch unter dem Namen EXTREMA *zusammen. Wir nennen* x_0 *eine* EXTREMALSTELLE, $f(x_0)$ *ein* EXTREMUM *und* $\big(x_0, f(x_0)\big)$ *einen* EXTREMPUNKT *(des Graphen) von* f.

Beispiel: Wir betrachten $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.



8. Typische Anfängerfehler

1. Aus $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ wird geschlossen, dass f monoton wachend, aber nicht streng monoton wachsend ist: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

ist streng monoton steigend, aber $f'(x) = 3x^2$, insb. $f'(0) = 0$.

2. Es wird nicht zwischen globalen und lokalen Extrema unterschieden.
3. Das notwendige Kriterium $f'(x_0) = 0$ für lokale Extrema in inneren Punkten wird auf globale Extrema angewendet:

Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ erfüllt

$$f'(x) = 2x \;\Rightarrow f'(1) = 2 \neq 0,$$

aber f hat in $x_0 = 1$ ein globales Maximum.