Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 10

Ungleichungen und Betragsungleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Ungleichungen.

Wie der Name es schon vermuten lässt, gibt eine Ungleichung an, ob eine Zahl (bzw. Seite) **kleiner, größer oder gleich** einer anderen Zahl (bzw. Seite) ist.

Beispiele für Ungleichungen sind:

$$6 \geq 4 \qquad 1 < 3 \qquad 4 \leq 4 \qquad -1 > -6$$

Wie wir später sehen werden, können natürlich auch in Ungleichungen (wie bei Gleichungen) Variablen vorkommen.

Bevor wir aber in die Tiefe gehen, müssen wir wissen, wie man mit Ungleichungen umgeht und auf was wir da achten müssen.

Wenn man mit Ungleichungen rechnen möchte, muss man einige Regeln beachten:

Bemerkung (10.1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Ungleichung $a \leq b$:

1) Vertauscht man beide Seiten der Ungleichung, dann ist das Ungleichungszeichen umzukehren:

$$\boxed{a \leq b \Longleftrightarrow b \geq a}$$

Das ist ja auch logisch, denn wenn man die erste Ungleichung mal von rechts liest, dann steht genau die zweite Ungleichung da.

Beispiele: $2 \leq 3 \Longleftrightarrow 3 \geq 2, \qquad -2 \leq 3 \Longleftrightarrow 3 \geq -2, \qquad 7 \geq 2 \Longleftrightarrow 2 \leq 7.$

Bemerkung (10.1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Ungleichung $a \leq b$:

2) Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, so bleibt die Ungleichung bestehen:

$$\boxed{a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a + c \leq b + c}$$

Beispiele: $2 \leq 3 \Longleftrightarrow 2 + 5 \leq 3 + 5 \Longleftrightarrow 7 \leq 8$

$$-2 \leq 3 \Longleftrightarrow -2 + 5 \leq 3 + 5 \Longleftrightarrow 3 \leq 8$$

$$7 \geq 2 \Longleftrightarrow 7 - 9 \geq 2 - 9 \Longleftrightarrow -2 \geq -7$$

Bemerkung (10.1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun die Ungleichung $a \leq b$:

3) Multipliziert man beide Seiten der Ungleichung mit einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann muss man zwei Fälle beachten:

$$a \leq b \Longleftrightarrow \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c, & \text{falls } c > 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

Denn: Beim Multiplizieren mit einer **negativen** Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um !

Beispiele: $2 \leq 3 \Longleftrightarrow 2 \cdot 5 \leq 3 \cdot 5 \Longleftrightarrow 10 \leq 15$

$$-2 \leq 3 \Longleftrightarrow -2 \cdot (-2) \geq 3 \cdot (-2) \Longleftrightarrow 4 \geq -6$$

$$7 \geq 2 \Longleftrightarrow 7 \cdot 3 \geq 2 \cdot 3 \Longleftrightarrow 21 \geq 6$$

Bemerkung (10.1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Ungleichung $a \leq b$:

4) Dividiert man beide Seiten der Ungleichung mit einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann muss man zwei Fälle beachten:

$$a \leq b \iff \begin{cases} \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{c}, & \text{falls } c > 0 \\[2ex] \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

Denn: Bei dem Dividieren mit einer **negativen** Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um !

Beispiele: $2 \leq 3 \iff \dfrac{2}{5} \leq \dfrac{3}{5}$

$$-2 \leq 3 \iff \frac{-2}{-2} \geq \frac{3}{-2} \iff 1 \geq -\frac{3}{2}$$

Beispiel (10.2)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$6x - 8 \leq 4$$

Mit Ungleichungen kann man genauso rechnen, wie mit Gleichungen, sofern man die eben genannten Regeln einhält:

$$6x - 8 \leq 4 \Longleftrightarrow 6x \leq 12 \Longleftrightarrow x \leq 2$$

Die Ungleichung $6x - 8 \leq 4$ erfüllen also alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 2$.
Auch bei Ungleichungen müssen wir wieder eine Lösungsmenge aufschreiben:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} = \mathbb{R}_{\leq 2} = (-\infty; 2]$$

Noch eine **Aufgabe:** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$-2x + 3 \leq 7$$

$$-2x + 3 \leq 7 \iff -2x \leq 4 \iff x \geq -2$$

Die Ungleichung $-2x + 3 \leq 7$ erfüllen also alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -2$.

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = \mathbb{R}_{\geq -2} = [-2; \infty)$$

Hinweis: Solch eine Schreibweise $[a; b]$ nennt man übrigens ein **Intervall**.
Nützlich: Eine eckige Klammer bedeutet, dass die Zahl an dem Rand mit dazu gehört, eine runde Klammer bedeutet, dass die Zahl am Rand NICHT dazugehört.

Beispiel:
$[2; 3]$: Alle Zahlen zwischen 2 und 3... die 2 und die 3 gehören dazu. Also: $2 \leq x \leq 3$
$[2; 3)$: Alle Zahlen zwischen 2 und 3... die 2 gehört dazu... die 3 nicht. Also: $2 \leq x < 3$
$(2; 3]$: Alle Zahlen zwischen 2 und 3... die 3 gehört dazu... die 2 nicht. Also: $2 < x \leq 3$
$(2; 3)$: Alle Zahlen zwischen 2 und 3... 2 und 3 gehören nicht dazu. Also: $2 < x < 3$

10.2 - Betragsungleichungen

So... wir kommen nun zu **Betragsungleichungen**, also Ungleichungen, in denen auch Beträge vorkommen.

Im letzten Kapitel haben wir ja Beträge gemacht... dazu sehen wir uns nun noch ein paar Regeln an, die auch Ungleichheitszeichen enthalten...:

Satz (10.3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1) **Positive Definitheit:**

$$\boxed{|a| \geq 0}$$

$$\boxed{|a| = 0 \iff a = 0}$$

2) **Positive Homogenität:**

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

3) **Dreiecksungleichung:**

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$$

4) Es gilt immer:

$$\boxed{a \leq |a|}$$

Satz (10.3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

5) Zwei wichtige Äquivalenzen:

$$\boxed{|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b}$$

$$\boxed{|a| \geq b \Longleftrightarrow a \geq b \text{ oder } a \leq -b}$$

Beispiel: $|x| \leq 3 \Longleftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

$|x| < 5 \Longleftrightarrow -5 < x < 5$

$|x| > 3 \Longleftrightarrow x > 3 \text{ oder } x < -3$

Wie gehen wir mit Betragsungleichungen um?

Bemerkung (10.4)

Im Prinzip muss man folgende Schritte bei einer Betragsungleichung durchführen:

1) Löst zunächst den Betrag auf, indem Ihr Fallunterscheidungen durchführt (die Fallunterscheidungen werden immer bei den Nullstellen des Arguments des Betrags durchgeführt).
2) In den einzelnen Fällen gibt es nun keine Beträge mehr, sodass man ”nur” noch normale Ungleichungen mit den Regeln aus Bemerkung 10.1 lösen muss.
3) Überprüft, ob die Lösungsmenge eines Falles auch der Bedingung des Falles genügt bzw. welche Zahlen der Lösungsmenge die Bedingung des Falles erfüllen. Diese Zahlen bilden dann die Lösungsmenge des Falles.
4) Die Gesamt-Lösungsmenge ist dann wieder die Vereinigung der Lösungsmengen aller aufgetretenen Fälle.

Beispiel (10.5)

Aufgabe: Finde alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|x-3| \leq 4$ erfüllen.

Dieses Problem kann man erneut als Abstandsproblem formulieren, wenn man die Differenz im Inneren des Betrags betrachtet. Hier steht ja der Abstand von x zu 3.

Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, die zur Zahl 3 einen Abstand von 4 oder weniger besitzen. Die Lösung kann man also wieder ohne Rechnen angeben. Es gilt nämlich

$$\mathbb{L} = [-1; 7]$$

Das Ergebnis ist wieder ein Intervall, welches alle reellen Zahlen zwischen -1 und 7 beinhaltet. Die Zahlen -1 und 7 gehören dazu (beachte die eckigen Klammern).

Rechnerisch: Wir nutzen 5) aus Satz (10.3):

$$|x-3| \leq 4 \quad \iff \quad -4 \leq x-3 \leq 4 \quad \iff \quad -1 \leq x \leq 7$$

Beispiel (10.6)

Aufgabe: Finde alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $2 + |x+3| < 3$ erfüllen.

Wir schauen uns zunächst wieder an, wann das Argument des Betrags gleich Null wird und machen dann anschließend eine Fallunterscheidung (vgl. Kapitel 9):

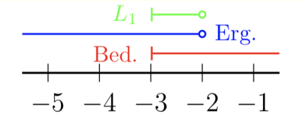
$$x + 3 = 0 \iff x = -3$$

Es wird also eine Fallunterscheidung bei $x = -3$ gemacht.
Die Fälle lauten somit $x \geq -3$ und $x < -3$:

1. Fall: $x \geq -3$:

$$2 + |x+3| < 3 \iff 2 + (x+3) < 3 \iff x + 5 < 3 \iff x < -2$$

Wir müssen nun alle $x \in \mathbb{R}$ finden, die $x < -2$ UND $x \geq -3$ erfüllen:



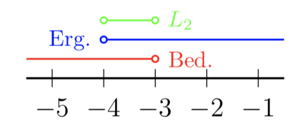
Also: $\boxed{\mathbb{L}_1 = [-3; -2)}$

Beispiel (10.7)

2. Fall: $x < -3$:

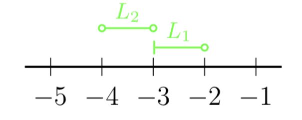
$$2 + |x+3| < 3 \iff 2 - (x+3) < 3 \iff 2 - x - 3 < 3 \iff -x < 4 \iff x > -4$$

Wir müssen nun alle $x \in \mathbb{R}$ finden, die $x < -3$ UND $x > -4$ erfüllen:



Also: $\boxed{\mathbb{L}_2 = (-4; -3)}$

Nun vereinigen wir $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, damit wir die Gesamtlösungsmenge erhalten:



Also: $\boxed{\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-4; -2)}$

Wir haben also gesehen:

Betragsungleichungen löst man quasi genau so wie Betragsgleichungen

Nur die Lösungsmengen sind bei den Betragsungleichungen schwieriger zu bestimmen. Hierzu muss man dann wieder die jeweilige rechnerisch erlangte "Lösung" eines Falles genau mit der Fall-Bedingung vergleichen.

Mathematisch bilden wir übrigens bei diesem Vergleich dann immer den **Schnitt** der "Lösung" mit der Fall-Bedingung.

Hier noch einmal eine kurze Zusammenfassung zur Lösung von Betrags(un)gleichungen:

- Versucht zunächst die Betrags(un)gleichung als Abstandsproblem zu formulieren.
- Sollte dies nicht möglich sein, dann geht rechnerisch vor... schaut Euch also an, wann das Argument des Betrags Null wird.
- Die "kritischen Stellen" sind dann gefunden. Schreibt anschließend die gefundenen Fälle auf.
- Löst die Gleichung bzw. Ungleichung für die entsprechenden Fälle.
- Achtet unbedingt darauf, dass die Lösungsmenge eines Falles der Bedingung des Falles entspricht bzw. welche Zahlen der Lösungsmenge dies tun.
- Die Gesamtlösungsmenge ist die Vereinigung aller Lösungsmengen der einzelnen Fälle.

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !