technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 14

Vektorräume und Matrizenrechnung

Definition (14.1)

Für einen Körper K (zum Beispiel $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) betrachten wir die **Vektoren**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V, \quad x_1, ..., x_n \in K$$

sowie die wie folgt (komponentenweise) definierte Addition von Vektoren bzw. die Multiplikation mit Skalaren (Elementen aus K).
Für $a, b \in V$, $\lambda \in K$ wird definiert:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \in V \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \in V$$

Die Elemente aus V bilden dann mit den eben definierten Verknüpfungen einen K-**Vektorraum**, genau dann, wenn die sogenannten **Vektorraumaxiome** erfüllt sind.

Definition (14.1)

Genauer:

$(V, +, \cdot)$, also die Menge V zusammen mit den zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt ein ($\mathbb{K}$-)**Vektorraum** $:\Longleftrightarrow$ Die folgenden **Vektorraumaxiome** sind erfüllt:

(V.1) $u + v = v + u \quad \forall\, u, v \in V$ (Kommutativgesetz der Addition)

(V.2) $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall\, u, v, w \in V$ (Assoziativgesetz der Addition)

(V.3) $\exists\, 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall\, v \in V$ (Neutrales Element der Addition)

(V.4) Zu jedem $v \in V$ $\exists$ genau ein $-v$ mit $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (Inverses Element der Addition)

(V.5) $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$

(V.6) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v, \quad \forall\, \lambda, \mu \in K,\ v \in V$ (Assoziativgesetz der skalaren Multipl.)

(V.7) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \quad \forall\, \lambda \in K,\ u, v \in V$ (Distributivgesetz I)

(V.8) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall\, \lambda, \mu \in K,\ v \in V$ (Distributivgesetz II)

Definition (14.1)

Wichtig: Man kann die Addition bzw. Skalarmultiplikation auch ganz anders definieren... das war jetzt eine Standardmethode... man kann das aber auch ganz anders definieren... aber wir wollen das jetzt nicht unnötig verkomplizieren.

Wenn klar ist, wie die Addition bzw. die Multiplikation mit Skalaren definiert sind, schreiben wir einfach nur V statt $(V, +, \cdot)$
Wenn klar ist, was der Körper K ist (bei uns meist $\mathbb{R}$), dann sprechen wir einfach von einem Vektorraum und nicht von einem K-Vektorraum.

Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**,
das neutrale Element 0 (der Addition) heißt der **Nullvektor** $\vec{0}$.

Wir schreiben jetzt ab hier die Vektoren mal mit einem Pfeil darüber... in HöMa I machen wir das später nicht mehr, aber in der Schule habt Ihr das ja auch so gemacht.

Die Elemente des Körpers K nennen wir **Skalare**. Für diese Skalare verwenden wir allgemein zumeist griechische Buchstaben $\lambda, \mu, \ldots$.

Diese **Vektorraumaxiome** und Vektorräume im Allgemeinen sehen wir uns dann in HöMa I im Wintersemester genauer an.

Wichtig zu wissen ist jetzt aber schon: Die Euch schon aus der Schule vom $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bekannten Vektoren sind also Elemente von Vektorräumen. Ob eine gegebene Menge mit den zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (skalare Multiplikation) ein Vektorraum ist, werden wir dann später prüfen.

Die Vektorraumaxiome garantieren uns (genau wie z.B. die bekannten Rechenregeln in den reellen Zahlen), dass wir beim Rechnen in einem Vektorraum immer im selben Raum bleiben und dann eben problemlos rechnen können.

Wir sehen uns mal ein paar Beispiele zu Vektorräumen an...

Beispiel (14.2)

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist mit der vorhin definierten (komponentenweisen) Addition und Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
(Würde man hier $\lambda \in \mathbb{C}$ zulassen, dann wäre es ein $\mathbb{C}$-Vektorraum).
Allgemein können wir uns so (für festes $n \in \mathbb{N}$) den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definieren:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit haben wir die Euch schon aus der Schule bekannten Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ also schon eingeführt.

Wir haben es jetzt zwar nicht nachgewiesen, aber diese Mengen erfüllen die Vektorraumaxiome aus Definition (14.1).

Bemerkung (14.3)

WICHTIG: Es gibt viel schwierigere Vektorräume, wo dann auch die Vektoren (also die Elemente der Vektorräume) eine ganz andere Gestalt haben ... und damit dann die vorhin definierten Verknüpfungen (Addition bzw. Skalarmultiplikation) gar keinen Sinn machen würden.

Wir werden uns in HöMa I davon ein paar Exoten ansehen.

Im weiteren Verlauf des Kapitels werden wir noch weitere Vektorräume kennenlernen.

Wir werden im Studium sehen: Die Vektorraumaxiome nachzuweisen ist langwierig und schwierig.

Wir betrachten nun hier (für Teilmengen von schon bekannten Vektorräumen) eine neue, deutlich einfachere Herangehensweise... den **Untervektorraum (UVR)**.

Sei V ein K-Vektorraum. Für eine Teilmenge U von V, also $U \subseteq V$, stellt sich die Frage, ob es sich bei U wieder um einen Vektorraum handelt.

Hier müsste man nun eigentlich wieder alle Vektorraumaxiome nachprüfen. Da hier aber schon $U \subseteq V$ gilt, "erbt" glücklicherweise die Menge U alle Vektorraumaxiome.

Man muss dann aber noch noch drei Sachen nachprüfen (was aber natürlich dann trotzdem eine riesige Erleichterung ist):

Satz (14.4)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn gilt:

(UVR1): $U \neq \emptyset$
(UVR2): Für alle $\vec{u}, \vec{v} \in U$ gilt: $\vec{u} + \vec{v} \in U$ **(Abgeschlossenheit bzgl. Addition)**
(UVR3): Für alle $\vec{u} \in U$ und alle $\lambda \in K$ gilt: $\lambda \cdot \vec{u} \in U$
(Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation)

Die Besonderheit: Ein Unterraum eines Vektorraumes ist auch selbst wieder ein Vektorraum.

14.1 - Vektorräume und Unterräume

Ihr habt bereits in der Schule einige Unterräume des $\mathbb{R}^3$ kennengelernt ohne es wirklich zu wissen. Hat jemand eine Idee?

Zum Beispiel im $\mathbb{R}^3$ gilt: Geraden durch den Ursprung (!) oder auch Ebenen durch den Ursprung (!) sind jeweils Unterräume des $\mathbb{R}^3$.

Das wollen wir hier nicht genauer nachprüfen, allerdings werden wir uns die Gestalt von Geraden und Ebenen genauer ansehen.

Beispiel (14.5)

1)

$$G_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese sogenannte **Parameterdarstellung einer Gerade** im $\mathbb{R}^3$ besteht also aus einem Aufpunkt/Stützvektor (hier: $(0,0,0)^T$) und einem Richtungsvektor (hier: $(1,3,2)^T$) mit entsprechendem Parameter $t \in \mathbb{R}$ (damit auch wirklich alle Punkte auf der Gerade erreicht werden).
Hinweis: Für $t = 0$ sieht man, dass $\vec{0} = (0,0,0)^T$ in G_1 enthalten ist, also die Gerade durch den Ursprung verläuft.

Frage: Wie kann man eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch zwei gegebene Punkte aufstellen ?

Beispiel (14.6)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Gerade, die durch die Punkte $A = (2, 1, 3)$ und $B = (1, 3, -1)$ verläuft.

Als Aufpunkt/Stützvektor wählen wir einfach den Vektor, der den Nullpunkt mit dem Punkt A verbindet, hier also:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Als Richtungsvektor wählen wir den Vektor, der von A nach B geht.
Diesen erhalten wir durch geschickte Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir sehen uns das mal zusammen graphisch an:

Beispiel (14.6)

Wir haben also unsere Gerade durch die Punkte A und B gefunden:

$$G_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Wir merken uns: Eine Gerade ist also eine Menge von Vektoren.

Wir machen die Probe und schauen, ob A und B wirklich auf G_2 liegen:

Wir prüfen also, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass sich $(2,1,3)^\top$ bzw. $(1,3,-1)^\top$ darstellen lassen. Und siehe da: Mit $t = 0$ bzw. mit $t = 1$, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A und B liegen somit auf der Geraden.
Diese Gerade verläuft allerdings **nicht** durch den Ursprung. (Wie zeigt man das?)

Beispiel (14.5 - Fortsetzung)

2) Die folgende Menge ist ein Beispiel für eine Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Ebene besteht also aus einem Stützvektor/Ortsvektor (hier: $(0,0,0)^T$) und zwei Richtungsvektoren (hier: $(1,2,2)^T$ und $(-2,4,0)^T$). Die beiden Richtungsvektoren dürfen kein Vielfaches voneinander sein.

Setzt man hier $s = t = 0$, dann sieht man, dass auch $\vec{x} = (0,0,0)^T$ in E_1 enthalten ist. Also muss die Ebene durch den Ursprung verlaufen.

E_1 und G_1 sind also Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Warum wären sie keine Unterräume mehr, wenn sie nicht durch den Ursprung verlaufen würden? Was würde schief gehen?

Ganz genau! Das 3. Axiom aus Satz 14.4 ist nicht für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt. Und zwar für $\lambda = 0$ gilt es dann nicht mehr.

Die Konstruktion einer Ebene verläuft also analog zu der Konstruktion einer Geraden, allerdings benötigt man zwei Richtungsvektoren, die keine Vielfachen voneinander sind! Genauer: Die beiden Richtungsvektoren müssen **linear unabhängig** sein !

Wir möchten uns nun noch weitere Darstellungsmöglichkeiten einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ anschauen. Dafür brauchen wir den Begriff des **Normalenvektors**.

Definition (14.7)

Sei V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $\vec{n} \in V$ heißt Normalenvektor, wenn er senkrecht/orthogonal auf einer gegebenen Menge von Vektoren , z.B. einer Ebene steht. Man sagt auch, dass die Vektoren $\vec{n}, \vec{m} \in V$ zueinander orthogonal sind, wenn $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$ gilt.

Wie ist die Multiplikation von zwei Vektoren $\vec{n} \cdot \vec{m}$ eigentlich definiert?
(Schlagwort: Standard-Skalarprodukt)

Beispiel (14.8)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = 3 + 0 - 2 = 1$$

Beispiel (14.9)

Betrachten wir nun erneut die Ebene von vorhin. Wir benötigen einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ der senkrecht auf beiden Richtungsvektoren steht, also für den gilt:

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Wir können also als Normalenvektor zum Beispiel

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wählen. Damit können wir E_1 nun in der Normalenform angeben:

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Beispiel (14.9)

Mit Hilfe der Normalenform lässt sich die Koordinatenform einer Ebene herleiten. Dazu multipliziert man einfach die Vektoren miteinander.

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Wir erhalten also als **Koordinatenform** der Ebene:

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Beispiel (14.9)

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Eine Besonderheit gibt es noch... die **Hesse-Normalform**.
Dazu muss aber die Länge des Normalenvektors gleich 1 sein.
Die Länge eines Vektors erhalten wir über die **Norm**.
Die Norm eines Vektors wird standardmäßig definiert als Wurzel des Skalarprodukts, also

$$||\vec{x}|| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >}$$

In unserem Fall mit dem Standardskalarprodukt erhalten wir:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

also für den Normalenvektor von E_1:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Beispiel (14.9)

Die Hesse-Normalform von E_1 erhalten wir nun aus der Normalenform durch Dividieren auf beiden Seiten mit $\frac{1}{||\vec{n}||}$:

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Unsere Hesse-Normalform ist also

$$\frac{1}{3} \cdot \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Was ist nun das Besondere an der Hesse-Normalform? Was kann man damit machen?
Wir können damit sehr leicht Abstände von Punkten zu der Ebene berechnen !

Beispiel (14.10)

Die Ebene E_1 sei in Hesse-Normalform gegeben:

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3} \cdot \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Berechne den Abstand der Ebene E_1 zum Punkt $A(1|2|-3)$.

Da die Ebene bereits in Hesse-Normalform gegeben ist, brauchen wir nur für $\vec{x}$ den gegebenen Punkt / Ortsvektor einsetzen:

$$\frac{1}{3} \cdot \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (2+2+6) = \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3}$$

Der Abstand beträgt also $\frac{10}{3}$.

Das war es mit einer kurzen Wiederholung zu Geraden und Ebenen. Nun schauen wir uns einen weiteren Vektorraum an.

Die Elemente dieses Vektorraums sehen nun anders aus. Daher müssen wir die Addition bzw. Skalarmultiplikation für diese Elemente definieren:

Beispiel (14.11)

Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Sie bildet mit der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\lambda \in K$ werden Addition bzw. Skalarmultiplikation also wie folgt definiert:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \lambda\cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

14.2 - Matrizenrechnung

Wir haben gerade die folgenden Rechenoperationen für Matrizen eingeführt:

1. für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Addition: $A + B$
2. für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die skalare Multiplikation: $\lambda \cdot A$

Wir benötigen noch die Multiplikation zweier Matrizen. Dafür müssen die Matrizen eine bestimmte Form haben!

Bemerkung (14.12)

Das **Matrizenprodukt** ist nur definiert, wenn die Größen der Matrizen zusammen passen. Hier gilt folgende Regel:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & \longrightarrow & C \\ (m \times \mathbf{p}) & \cdot & (\mathbf{p} \times n) & \longrightarrow & (m \times n) \end{array}}$$

Merke: Die erste Matrix muss genau so viele Spalten haben wie die zweite Matrix Zeilen hat.

Wir sehen uns nun mal an, wie man Matrizen miteinander multipliziert!

Beispiel (14.13)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

A darf also **von rechts** nur mit einer Matrix B mit genau 3 Zeilen multipliziert werden, also zum Beispiel mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Hinweis: $B \cdot A$ kann hier auch gebildet werden, da die Größen passen! Welche Größe hätte die Matrix?

Beispiel (14.14)

Betrachten wir erneut die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

A darf **von links** nur mit einer Matrix C mit genau 2 Spalten multipliziert werden, also z.B. mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Dann ist

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Hinweis: Hier ist das Produkt $A \cdot C$ nicht bildbar, da die Größen nicht passen.

Bemerkung (14.15)

Anders als z.B. bei zwei Zahlen aus $\mathbb{R}$ ist das Matrizenprodukt **nicht** kommutativ.
Die Reihenfolge der Matrizenmultiplikation ist also wichtig !

Auch wenn beide Produkte definiert sind, gilt das Kommutativgesetz i.A. **nicht**:

Beispiel (14.16)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Beide Produkte sind definiert, aber offensichtlich nicht gleich... sie haben sogar andere Matrizen-Größen im Ergebnis !

Beispiel (14.16)

2. Selbst bei "gleich großen" Matrizen gilt das Kommutativgesetz i.A. **nicht**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   Auch hier sehen wir:
   Das Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen bei Matrizen **nicht**!

3. Ein Produkt $A \cdot B$ kann gleich der Nullmatrix sein (siehe oben), obwohl keine der beiden Matrizen A und/oder B selbst die Nullmatrix ist: Weiteres Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei dem folgenden Satz lassen wir mal aus Übersichtsgründen die detailliert anzugebenden Größen der Matrizen weg und schreiben ”geeigneter Größe”.

Satz (14.17)

Für Matrizen A, B, C geeigneter Größe (!) und Skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

1. **Distributivgesetze**:

$$\boxed{(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C, \qquad A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C}$$

2. **Multiplikation mit Skalaren:**

$$\boxed{\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)}$$

3. **Assoziativgesetz:**

$$\boxed{A\cdot B\cdot C = A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C}$$

Das war schon mal einiges über Matrizen. Diese werden uns noch sehr oft in Höhere Mathematik begegnen.
Matrizen tauchen z.B. auf bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen, bei linearen Abbildungen, in der mehrdimensionalen Analysis... und... und ... und.
Seid gespannt !

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !