technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 2:

Summen und Produkte

Abkürzende Schreibweisen für Summe und Produkt:

Beispiele: $$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5, \qquad \prod_{k=1}^{5} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

Warum machen wir das?

Die 5 Zahlen könnten wir ohne Probleme auch ohne abkürzende Schreibweise addieren oder multiplizieren. Aber wie sieht's z.b. bei 100 Zahlen oder gar 1000 Zahlen (oder sogar unendlich vielen !) aus?
Mit der abkürzenden Schreibweise kein Problem:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+4+5+\ldots+98+99+100, \qquad \prod_{k=3}^{56} k = 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 54\cdot 55\cdot 56$$

Später in HöMa betrachten wir sogar sogenannte **Reihen** mit unendlich vielen Summanden, z.B.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

Definition (2.1)

Allgemein schreibt man das für Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ dann so:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}$$

k nennt man dabei den sogenannten **Laufindex** der Summe bzw. des Produkts.
1 wäre in diesem Fall dann der **Startwert** und n der **Endwert**.

Beispiele:

$$\sum_{j=2}^{7} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 139$$

Hier ist nun der Laufindex j mit Startwert 2 und Endwert 7.

$$\sum_{i=3}^{5} (2i - 2) = 3 \cdot 2 - 2 + 4 \cdot 2 - 2 + 5 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 + 8 - 2 + 10 - 2 = 4 + 6 + 8 = 18$$

Hier ist nun der Laufindex i mit Startwert 3 und Endwert 5.

Später in Höhere Mathematik I nutzen wir **Index-Transformationen**.
Ein einfaches Beispiel dazu macht klar, was das soll:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{j=2}^{6} (j-1)$$

Wir prüfen mal nach, ob hier wirklich dasselbe herauskommt:

$$\sum_{j=2}^{6} (j-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Tatsächlich... Ergebnis ist gleich.
In der zweiten Summe hat man statt dem k dann $j-1$ gesetzt, also $k = j - 1$.
Daraus ergibt sich dann, umgestellt nach j:

$$j = k + 1$$

Hier ändern sich also auch Start- und Endwert entsprechend (werden um 1 erhöht).

Merke: $\boxed{\text{Man kann also Summen auf verschiedene Arten schreiben !}}$

2.1 - Summen und Produkte

Aufgabe: Finden Sie jeweils zwei verschiedene Summenschreibweisen für die folgenden Ausdrücke:

$$2+4+6+8+10, \qquad 1+4+9+16, \qquad 1+9+25+49, \qquad 2-3+4-5+6$$

Antworten:

$$2+4+6+8+10 = \sum_{k=1}^{5} 2k \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{4} 2(j+1)$$

Hinweis: Zur Berechnung der Grenzen ganz rechts in der Summe haben wir $k = j+1$ umgestellt nach j, also dann: $j = k-1$.

$$1+4+9+16 = \sum_{k=1}^{4} k^2 \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{3} (j+1)^2$$

$$1+9+25+49 = \sum_{k=0}^{3} (2k+1)^2 \overset{k=j-1}{=} \sum_{j=1}^{4} (2j-1)^2$$

$$2-3+4-5+6 = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k k \overset{k=j+1}{=} \sum_{j=1}^{5} (-1)^{j+1}(j+1)$$

Wie gerade gesehen, muss der Laufindex k natürlich nicht immer bei 1 anfangen, sondern kann beliebig aus $\mathbb{N}$, sogar aus $\mathbb{Z}$ sein, also z.B.

$$\sum_{k=-2}^{1}(k-2) = (-2-2)+(-1-2)+(0-2)+(1-2) = -4-3-2-1 = -10$$

$$\prod_{k=3}^{7} k^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2$$

Allgemein schreibt man das dann wieder für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m \leq n$ so:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Bemerkung (2.2)

Sollte beim Summenzeichen oder Produktzeichen die obere Zahl **kleiner** sein als die untere, so summiert (bzw. multipliziert) man ja quasi gar nicht los. Es gelten dann folgende Vereinbarungen (hier nur der Einfachheit halber am Beispiel angegeben):

$$\sum_{k=5}^{2} a_k = 0, \qquad \prod_{k=3}^{1} a_k = 1$$

Also bei einer Summe kommt dann immer 0 heraus, bei einem Produkt immer 1.

Dies liegt daran, dass bei einer Summe $+0$ (also das Addieren der Null) die Summe unverändert lässt und bei einem Produkt $\cdot 1$ (also das Malnehmen mit 1) das Produkt unverändert lässt.

Rechenregeln und Beispiele:

1. **Faktoren vor der Summe in die Summe hineinziehen**:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{4} k = 4 \cdot (1+2+3+4) = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = \sum_{k=1}^{4} 4 \cdot k,$$

$$\text{also} \quad \boxed{4 \cdot \sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{4} 4 \cdot k}$$

$$\text{Allgemein:} \quad \boxed{a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)}$$

2. Falls Laufindex sowie Start- und Endwert der beiden Summen gleich sind:
Zwei Summen addieren:

$$\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 2k = (1+2+3+4) + (2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4) =$$

$$= 1 + 2\cdot 1 + 2 + 2\cdot 2 + 3 + 2\cdot 3 + 4 + 2\cdot 4 = \sum_{k=1}^{4}(k+2k) = \sum_{k=1}^{4} 3k,$$

also $\boxed{\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 2k = \sum_{k=1}^{4} 3k}$

Allgemein: $\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)}$

Gleiches gilt natürlich auch für Produkte.

2.2 - Quantoren

In der Mathematik gibt es - neben den gerade erwähnten Summen- und Produktzeichen - weitere sinnvolle Abkürzungen bzw. Zeichen, die oft genutzt werden, um weniger Text schreiben zu müssen. Man muss sich ein bischen daran gewöhnen... Sehen wir uns also mal ein paar solcher sogenannter **Quantoren** an:

Definition (2.3)

Folgende Quantoren tauchen bei uns auf:

1. **Und**: $A \wedge B$ bedeutet: A und B.
2. **Oder**: $A \vee B$ bedeutet: A oder B.
3. **Für alle**: $\forall\, x \in A$ bedeutet: Für alle $x \in A$.
4. **Es existiert**: $\exists\, x \in A$ bedeutet: Es existiert ein $x \in A$.

Beispiele: Was bedeuten die folgenden Aussagen und sind sie wahr?
1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 1 \;\vee\; x < 1$
Ausformuliert: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 1$ oder $x < 1$.
Das stimmt NICHT ! Denn für $x = 1$ gilt keines der beiden.
2. $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0 \;\wedge\; \sqrt{x} \in \mathbb{N}$
Ausformuliert: Es existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit: $x > 0$ und $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$.
Das stimmt ! Nehme z.B. $x = 4 > 0$ und $4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
Ausformuliert: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Summenformel (zeigen wir später mit der Beweismethode Vollständige Induktion im HöMa I... stimmt also !)

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !