Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 3

Bruchrechnung

3 - Bruchrechnung

Ihr alle habt Brüche und Potenzen in der Mittelstufe Eurer Schule gemacht. Leider sehen wir aber oft in den HöMa-Klausuren, dass Studierende durch die Klausur fallen... wegen fehlenden Kenntnissen in Bruchrechnen bzw. Potenzrechnung. Also wiederholen wir das heute einfach mal komplett:

Schauen wir uns mal Elemente aus der Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) an. Nehmen wir zum Beispiel das folgende Element:

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$$

So ein Element nennt man einen **Bruch**.
Jeder Bruch besteht aus einem Zähler (oben) und einem Nenner (unten). Die Zahlen im Zähler und Nenner sind immer ganze bzw. natürliche Zahlen, allerdings ist die Null 0 natürlich im Nenner (also unten) nicht erlaubt.

Das Besondere ist nun, dass jede rationale Zahl unendlich viele Darstellungen besitzt, wie wir jetzt sehen werden.

Sehen wir uns mal die folgenden Brüche an:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{15}{20} \qquad \frac{9}{12} \qquad \frac{30}{40}$$

Was fällt bei den vier Brüchen auf? Man kann die Brüche umschreiben zu:

$$\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} \qquad \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} \qquad \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} \qquad \frac{10 \cdot 3}{10 \cdot 4}$$

Da nun im Zähler und Nenner jeweils ein gleicher Faktor ist, kann man diesen **kürzen** und anschließend steht dort immer der gleiche Bruch.
Wir hatten also vier Mal **dieselbe Zahl**:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12} = \frac{30}{40}$$

Lemma (3.1)

Seien $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$, dann gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}}$$

Schaut man sich die Gleichung von links nach rechts an, dann sagt man:
Der Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit dem Faktor k **erweitert**.
Von rechts nach links gelesen:
Der Bruch $\frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ wird um den Faktor k **gekürzt**.

Wichtig: Wir dürfen nur kürzen, weil oben und unten jeweils Produkte stehen. Enthält der Zähler oder der Nenner eine Summe (oder Differenz), so muss man erst **Ausklammern** um Kürzen zu können. Dazu muss dann natürlich jeder Summand den Faktor k enthalten, damit man ausklammern kann und anschließend gekürzt werden darf:

$$\frac{3+6}{9+15} = \frac{3 \cdot (1+2)}{3 \cdot (3+5)} = \frac{(1+2)}{(3+5)} = \frac{3}{8}$$

Wir haben also den Faktor 3 komplett in Zähler und Nenner **ausgeklammert** und danach gekürzt.

Sehen wir uns mal ein paar Brüche mit negativen Zahlen im Zähler und/oder im Nenner an. Dann gelten folgende Gleichheiten:

$$\frac{-2}{5} = \frac{(-1)\cdot(-2)}{(-1)\cdot 5} = \frac{2}{-5}, \qquad \frac{3}{-2} = \frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{-3}{2}, \qquad \frac{-4}{-7} = \frac{(-1)\cdot 4}{(-1)\cdot 7} = \frac{4}{7}$$

Bei den ersten beiden Brüchen haben wir mit (-1) erweitert (also oben und unten mit (-1) malgenommen). Bei dem dritten Bruch haben wir (-1) ausgeklammert und dann gekürzt.

Lemma (3.2)

Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}}$$

3 - Bruchrechnung

Im nächsten Schritt möchten wir zwei **Brüche addieren bzw. subtrahieren**.
Schauen wir uns dazu die folgenden zwei Brüche an:

$$\frac{5}{6} \qquad\qquad \frac{4}{9}$$

Wie können wir diese beiden Brüche addieren bzw. subtrahieren?
Wir dürfen **NICHT** einfach die Zähler und Nenner getrennt voneinander addieren bzw. subtrahieren, sondern wir benötigen einen sogenannten **Hauptnenner** !
Wir erweitern die beiden Brüche also so, dass sie dann beide den gleichen Nenner besitzen. Wir suchen also das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** der beiden Nenner. Hier ist das kgV von 6 und 9 , also der beiden Nenner, ja gleich 18.
Wir bringen also beide Brüche durch Erweitern auf den Hauptnenner 18:

$$\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{15}{18} \qquad\qquad \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{8}{18}$$

Nun können wir die beiden Brüche einfach addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{15+8}{18} = \frac{23}{18} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{15}{18} - \frac{8}{18} = \frac{15-8}{18} = \frac{7}{18}$$

Findet man das kgV nicht so schnell, so gibt es die folgende Methode:
Wir erweitern einfach den einen Bruch mit dem Nenner des anderen Bruchs und umgekehrt. Dann müssen wir hinterher meist noch kürzen, aber es funktioniert immer.
Auf das vorherige Beispiel bezogen, bedeutet das:

Wir hatten folgende Brüche: $\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$: $\quad \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 6} = \frac{45}{54} \qquad \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{24}{54}$

Addiert bzw. subtrahiert man diese beiden Brüche und kürzt anschließend noch, so erhält man die gleichen Ergebnisse wie eben:

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 6} + \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{45}{54} + \frac{24}{54} = \frac{45 + 24}{54} = \frac{69}{54} = \frac{3 \cdot 23}{3 \cdot 18} = \frac{23}{18}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 6} - \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{45}{54} - \frac{24}{54} = \frac{45 - 24}{54} = \frac{21}{54} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 18} = \frac{7}{18}$$

Wir schreiben das mal allgemein auf: Es gilt also:

Lemma (3.3)

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Addition bzw. Subtraktion dieser Brüche:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2} \pm \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}}$$

Die **Multiplikation von Brüchen** ist deutlich leichter als Addition bzw. Subtraktion. Schauen wir uns wieder die beiden Brüche von eben an:

$$\frac{5}{6} \qquad\qquad \frac{4}{9}$$

Für die Multiplikation benötigen wir keinen gemeinsamen Nenner. Tatsächlich kann man "einfach" beide Zähler und beide Nenner miteinander multiplizieren:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{20}{54} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 27} = \frac{10}{27}$$

Das lässt sich allgemein wie folgt formulieren:

Lemma (3.4)

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für die Multiplikation dieser Brüche:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}}$$

Bei der **Division von Brüchen** nutzen wir einen kleinen Trick. Sehen wir uns mal einen Bruch an und schreiben ihn ein wenig um:

$$5 : 6 = \frac{5}{6} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$$

Das Beispiel soll veranschaulichen, dass man anstatt zu dividieren auch **mit dem Kehrwert multiplizieren** kann. Mit zwei Brüchen sieht das so aus:

$$\frac{5}{6} : \frac{4}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 4} = \frac{45}{24} \quad \left(= \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 8} = \frac{15}{8} \right)$$

Das lässt sich Allgemein wie folgt formulieren:

Lemma (3.5)

Seien $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, dabei $a_2 \neq 0$, dann gilt für die Division dieser Brüche:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}}$$

3 - Bruchrechnung

Manchmal muss man Brüche zunächst etwas umschreiben, bevor man mit ihnen weiterrechnen kann. Dabei nutzen wir in der Regel zwei Eigenschaften aus:

1) Ein Bruch verändert sich nicht, wenn man ihn mit einer 1 multipliziert:

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{35}{14}$$

   Uns fällt auf:

Mit einer 1 multiplizieren ist dasselbe wie Erweitern mit einer beliebigen Zahl

   (Hier haben wir mit 7 erweitert.)

2) Ein Bruch bzw. eine Zahl verändert sich nicht, wenn man eine 0 addiert:

$$\frac{5}{2} = \frac{5+8-8}{2} = \frac{5}{2+8-8}$$

   Das braucht man manchmal, um Brüche zu vereinfachen, z.B.:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Beispiel: Konstruiere jeweils einen Bruch aus folgenden Zahlen:

$$a)\ 1,573 \qquad b)\ 2,75 \qquad c)\ 3,86424$$

Zu a): Hinter dem Komma sind **drei** Stellen, also die letzte Ziffer hinter dem Komma sind Tausendstel (1000 ist eine 1 mit **drei** Nullen). Also: Wir erweitern mit 1000:

$$1,573 = \frac{1,573 \cdot 1000}{1000} = \frac{1573}{1000}$$

Zu b): Hinter dem Komma sind **zwei** Stellen, also wir erweitern mit 100:

$$2,75 = \frac{2,75 \cdot 100}{100} = \frac{275}{100}$$

Zu c): Hinter dem Komma sind **fünf** Stellen, also wir erweitern mit 100000:

$$3,86424 = \frac{3,86424 \cdot 100000}{100000} = \frac{386424}{100000} = \frac{48303}{12500}$$

Beispiel: Konstruiere jeweils einen Bruch aus folgenden Zahlen:

$$d)\ 2,\overline{3} \qquad e)\ 3,\overline{34}$$

Zu d): Hier müssen wir etwas anders vorgehen. Wir sehen uns das erstmal zusammen am Beispiel an:

$$2,\overline{3} = 2 + 0,\overline{3} = 2 + \frac{3}{9} = \frac{18}{9} + \frac{3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Was haben wir also gemacht? Da wir hier eine Periode haben, mussten wir etwas anders vorgehen. Wir haben also die Dezimalzahl umgeschrieben in eine Summe. Bei der Zahl **mit** Periode (genauer eine Periode mit **einer** Stelle), haben wir im Bruch im Nenner **eine** Neun geschrieben.
Dann nur noch alles auf Hauptnenner gebracht... zusammengefasst... fertig.

Zu e): Hier haben wir eine Periode mit **zwei** Stellen. Also: Genau wie eben erstmal als Summe schreiben. Dann im Bruch bei der Zahl mit der Periode im Nenner **zwei** Neunen, also 99:

$$3,\overline{34} = 3 + 0,\overline{34} = 3 + \frac{34}{99} = \frac{297}{99} + \frac{34}{99} = \frac{331}{99}$$

Beispiel: Konstruiere einen Bruch aus folgender Zahl:

$$f) \qquad 0,\overline{9}$$

Zu f): Hier haben wir eine Periode mit **einer** Stelle. Also: Wir schreiben im Bruch im Nenner **eine** Neun:

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Beispiel: Konstruiere einen Bruch aus der folgenden Zahl:

$$g)\ 1,56\overline{23}$$

Zu g): Hier sieht es noch komplizierter aus, aber wir gehen wieder genau so vor wie eben... also erstmal als Summe schreiben und dann:

$$1,56\overline{23} = 1,56 + 0,00\overline{23} = \frac{156}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{23}{99} = \frac{156}{100} + \frac{23}{9900}$$

$$= \frac{15444}{9900} + \frac{23}{9900} = \frac{15467}{9900}$$

Also vereinfacht (ohne den Umweg über die Multiplikation von Brüchen oben): Bei solchen "gemischten" Kommazahlen nehmen wir für die Anzahl der Periodenstellen dieselbe Anzahl an Neunen und für die restlichen Stellen dann Nullen dahinter. Hier: Zweistellige Periode (entspricht 99) plus zwei Stellen davor (entspricht 00 dahinter), also im Nenner 9900:

$$1,56\overline{23} = 1,56 + 0,00\overline{23} = \frac{156}{100} + \frac{23}{9900} = \frac{15444}{9900} + \frac{23}{9900} = \frac{15467}{9900}$$

Beispiel (3.6)

Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich für $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\frac{2ab + ac}{4a^2} : \frac{b + \frac{c}{2}}{8a} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{2ab + ac}{4a^2} : \frac{b + \frac{c}{2}}{8a} + \frac{1}{c} = \frac{a \cdot (2b + c)}{4a^2} : \frac{b + \frac{c}{2}}{8a} + \frac{1}{c} =$$

$$= \frac{2b + c}{4a} \cdot \frac{8a}{b + \frac{c}{2}} + \frac{1}{c} = \frac{8a \cdot (2b + c)}{4a(b + \frac{c}{2})} + \frac{1}{c} = \frac{2 \cdot (2b + c)}{(b + \frac{c}{2})} + \frac{1}{c}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot (b + \frac{c}{2})}{(b + \frac{c}{2})} + \frac{1}{c} = 4 + \frac{1}{c} \quad \left(= \frac{4c}{c} + \frac{1}{c} = \frac{4c + 1}{c} \right)$$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !