Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 4

Potenzrechnung

Hinweis: Wir betrachten hier in diesem Kapitel in den meisten Fällen nur **ganzzahlige** Potenzen. Man kann - wie wir heute auch noch sehen werden - natürlich auch rationale Potenzen (und sogar reelle Potenzen) betrachten... allerdings muss man da dann etwas aufpassen. Negative Basen sind dann nämlich nicht erlaubt. Wir kommen später nochmal auf dieses Thema zurück... dies nur als Hinweis vorab.

POTENZEN: Multiplizieren wir dieselbe Zahl viele Male, so bietet sich folgende Kurzschreibweise an:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 Mal}} = 4^6$$

Die Zahl, die malgenommen wird (hier die 4), nennen wir die **Basis** und die Anzahl, wie oft malgenommen wird (hier die 6), nennen wir den **Exponent**.
Die Basis darf natürlich auch eine negative Zahl sein:

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$$

Auch negative Exponenten sind erlaubt. Hierbei gilt dann folgende Umformung:

$$8^{-3} = \frac{1}{8^3}$$

Das funktioniert auch im Nenner:

$$\frac{1}{2^{-4}} = 2^4$$

Definition (4.1)

Ein Produkt aus gleichen Faktoren $a \in \mathbb{R}$ wird kurz geschrieben als Potenz

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{n-mal}} = a^n$$

a heißt die **Basis**, n heißt der **Exponent** der Potenz.
Potenzen mit **negativen Exponenten** wechseln vom Zähler in den Nenner und umgekehrt.

4 - Potenzrechnung

Um Potenzen miteinander verrechnen zu können, gibt es die **Potenzgesetze**. Diese gehen wir nun nacheinander durch.

1. Potenzen mit gleicher Basis

- $2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{5+3}$
- $3^4 \cdot 3^6 = 3^{4+6} = 3^{10}$
- $6^2 \cdot 6 = 6^2 \cdot 6^1 = 6^{2+1} = 6^3$
- $5^4 : 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5^{4-2} = 5^2$ $\qquad \frac{2^7}{2^9} = 2^{7-9} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Lemma (4.2)

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

2. Potenzen mit gleichem Exponenten

- $5^2 \cdot 3^2 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 3) = (5 \cdot 3)^2 = 15^2$
- $(-2)^6 \cdot 4^6 = ((-2) \cdot 4)^6 = (-8)^6$
  (hier ist übrigens $(-8)^6 = (-1)^6 \cdot 8^6 = 1 \cdot 8^6 = 8^6$)
- $2^{14} \cdot 9^{14} = (2 \cdot 9)^{14} = 18^{14}$
- $2^{-3} \cdot 4^{-3} = (2 \cdot 4)^{-3} = 8^{-3} = \frac{1}{8^3}$
- $\frac{4^7}{2^7} = \left(\frac{4}{2}\right)^7 = 2^7, \qquad \frac{3^{-3}}{6^{-3}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3$

Lemma (4.3)

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert (bzw. dividiert), indem man die Basen multipliziert (bzw. dividiert) und den Exponenten beibehält:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \qquad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

3. Potenzieren von Potenzen

Potenzen können auch mehrfach mit sich selbst malgenommen werden, also **potenziert** werden, d.h. mit einem Exponenten versehen werden. Wir nutzen mal unsere bisher erlangten Potenzgesetze, um herauszufinden, wie das geht:

- $(3^2)^4 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{\text{4 Mal}} = 3^{2+2+2+2} = 3^8 \qquad (= 3^{2\cdot 4})$
- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = 7^3 \cdot 7^3 = 7^{3+3} = 7^6 \quad (= 7^{2\cdot 3})$
- $(9^{18})^2 = 9^{2\cdot 18} = 9^{36}$

Lemma (4.4)

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten (Brüche als Exponent):
Für eine positive Basis *a* kann man auch Brüche als Potenzen berechnen:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{4^3}, \qquad 3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}, \qquad 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3},$$

$$3^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{3^1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lemma (4.5)

Sei $a > 0$. Potenzen mit rationalen Exponenten werden zu Wurzelausdrücken, also

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$$

Hierbei ist natürlich noch wichtig, dass der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden darf und dass man nicht irgendwo durch Null teilt.

Zusätzlich wird für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Auch Summen können potenziert werden. Hierfür kennen Sie bereits die **Binomischen Formeln**.

Satz (4.6)

Für reelle Zahlen a, b gelten die **Binomischen Formeln**:

1. Binomische Formel: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

2. Binomische Formel: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

3. Binomische Formel: $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$

Beispiele:

1. $(x+2y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
2. $(6x^2 - 3y^2)^2 = 36x^4 - 2\cdot 6x^2\cdot 3y^2 + 9y^4 = 36x^4 - 36x^2y^2 + 9y^4$
3. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1$

Bemerkung (4.7)

- Was halten Sie von dieser "Lösung"?

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

Das ist natürlich FALSCH ! Denn: $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$
Also: Nie Wurzeln summandenweise berechnen, denn i.A. ist

$$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Wir können die Falschheit auch mit der bisher gelernten Potenzrechnung einsehen:

$$\sqrt{16+9} = (16+9)^{\frac{1}{2}} \neq 16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$$

- Probleme mit negativen Basen bei z.B. rationalen Exponenten:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \lightning$$

Darf man so nicht rechnen ! Beachte Hinweis vom Anfang: Negative Basen nur bei ganzzahligen Exponenten erlaubt !

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !