Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 5

Gemischte Übungen zu Bruchrechnung und Potenzrechnung, Rechnen mit e-Funktion und Logarithmus

Aufgaben Bruchrechnung:

a)

$$i): \frac{x^2}{x+1}-x=\frac{x^2-x(x+1)}{x+1}=\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=\frac{-x}{x+1}=\frac{-x-1+1}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1}$$

$$ii): \quad \frac{2}{3a}+\frac{1}{b}=\frac{2\cdot b+1\cdot 3a}{3ab}=\frac{2b+3a}{3ab}$$

$$iii): \quad \frac{5}{3x}-\frac{11}{9}-\frac{4}{x^2}=\frac{5\cdot 3x-11x^2-4\cdot 9}{9x^2}=\frac{-11x^2+15x-36}{9x^2}$$

b)

$$i): \quad 8ab:\frac{4a}{5b}=8ab\cdot\frac{5b}{4a}=\frac{8ab\cdot 5b}{4a}=10b^2$$

$$ii): \quad \left(\frac{b}{a}-1\right):\frac{a-b}{ab}=\left(\frac{b-a}{a}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a-b}\right)=\frac{(b-a)ab}{a(a-b)}=$$

$$=\frac{(b-a)\cdot b}{a-b}=\frac{(-1)(a-b)b}{a-b}=-b$$

Aufgaben Bruchrechnung:

c)

$$\frac{\frac{n}{n^2-1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}} = \frac{n}{n^2-1} : \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{n}{n^2-1} : \left(\frac{n-1-(n+1)}{(n+1)(n-1)}\right) = \frac{n}{n^2-1} : \left(\frac{-2}{n^2-1}\right) =$$

$$= \frac{n}{n^2-1} \cdot \frac{n^2-1}{-2} = \frac{n(n^2-1)}{-2(n^2-1)} = -\frac{n}{2}$$

Aufgaben Potenzrechnung:

d)

$$i): \quad x^2 \cdot (x^3 + x^4) = x^{2+3} + x^{2+4} = x^5 + x^6 = x^5(1+x)$$

$$ii): \quad (4y^3 - 6x^7)(4y^3 + 6x^7) = (4y^3)^2 - (6x^7)^2 = 4^2 \cdot y^{2\cdot 3} - 6^2 x^{7\cdot 2} = 16y^6 - 36x^{14}$$

e)

$$i): \quad \frac{27a^3}{8b^3} = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{3a}{2b}\right)^3$$

$$ii): \quad \frac{(2a+3b)^{-5}}{(4a^2-9b^2)^{-5}} = \left(\frac{2a+3b}{4a^2-9b^2}\right)^{-5} = \left(\frac{2a+3b}{(2a+3b)(2a-3b)}\right)^{-5} =$$

$$= \left(\frac{1}{2a-3b}\right)^{-5} = (2a-3b)^5$$

Aufgaben Potenzrechnung:

f)

$$i):\quad (x^2y^3)^4 = (x^2)^4\cdot(y^3)^4 = x^{2\cdot 4}\cdot y^{3\cdot 4} = x^8y^{12}$$

$$ii):\quad \frac{(6a^6b^8)^4}{(3a^5b^2)^4} = (2ab^6)^4 = 16a^4b^{24}$$

$$iii):\quad \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{2+3}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$$

$$iv):\quad \sqrt{\sqrt[3]{16}\sqrt[9]{64}} = \sqrt{16^{\frac{1}{3}}\cdot 64^{\frac{1}{9}}} = \sqrt{(2^4)^{\frac{1}{3}}\cdot(2^6)^{\frac{1}{9}}} = \sqrt{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{6}{9}}} =$$

$$= \sqrt{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \sqrt{2^{\frac{6}{3}}} = \sqrt{2^2} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

Da wir nun schon mal am Rechnen sind, wollen wir nun noch mit der Exponential-Funktion und dem natürlichen Logarithmus rechnen lernen.
In einem späteren Kapitel führen wir dann die Funktionen noch formal ein, ... hier beschränken wir uns erstmal nur auf das Anwenden der Rechenregeln.

Exponentialfunktion e^x:

Bemerkung (5.1)

Es gilt das **Additionstheorem der Exponentialfunktion:**

$$\boxed{e^x \cdot e^y = e^{x+y}}$$

Die e-Funktion verhält sich also genau so, wie wir das Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis gewohnt sind: **Die Exponenten werden addiert**

5.2 - Rechnen mit *e*-Funktion und Logarithmus

Aufgaben:

$$e^{4x+2} \cdot e^{-2-4x} = e^{4x+2+(-2-4x)} = e^0 = 1$$

$$e^x e^y e^{-2x} e^{3y} e^{2x+y} e^{-4y} = e^{x+y-2x+3y+2x+y-4y} = e^{x+y}$$

Natürlicher Logarithmus:

Bemerkung (5.2)

$\ln x : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$: Es gelten die **Funktionalgleichungen** für $x, y > 0$:

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{sowie} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$$

Außerdem gilt dann insbesondere:

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{ - mal })}) = \underbrace{\ln x + \ln x + \ln x + \ldots + \ln x}_{n\text{ - mal}} = n \cdot \ln x,$$

also

$$\boxed{\ln(x^n) = n \cdot \ln x}$$

Noch zu erwähnen: Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus (und umgekehrt), es gilt also:

$$\boxed{e^{\ln x} = x} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\ln(e^x) = x}$$

Aufgaben:

$$\ln(xy) - \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x + \ln y - (\ln x - \ln y) = \ln x + \ln y - \ln x + \ln y = 2 \cdot \ln y = \ln y^2$$

$$\ln(2x)^{100} - 99 \cdot (\ln 2 - \ln x) - 199 \ln x = 100 \ln(2x) - 99 \ln 2 + 99 \ln x - 199 \ln x =$$

$$= 100 \ln 2 + 100 \ln x - 99 \ln 2 + 99 \ln x - 199 \ln x = \ln 2$$

Ehemalige Klausuraufgabe aus HöMa 2 zum Rechnen mit e^x und $\ln x$:

$$\frac{4e^{\ln(x)} + \ln(x^2 \cdot y^2) - \ln(\frac{x^2}{y^2}) - 4\ln(y)}{2e^{x+y} \cdot \ln(e^x) \cdot e^{-(x+y)}} =$$

$$= \frac{4x + \ln x^2 + \ln y^2 - (\ln x^2 - \ln y^2) - 4\ln(y)}{2x \cdot e^{x+y-(x+y)}} =$$

$$= \frac{4x + 2\ln y^2 - 4\ln y}{2xe^0} = \frac{4x + 4\ln y - 4\ln y}{2x} = \frac{4x}{2x} = 2$$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !