technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Mathematischer Vorkurs für Ingenieure

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer / Maximilian Sperber (M.Sc.)

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Kapitel 9

Beträge

Definition (9.1)

Für $a \in \mathbb{R}$ wird der **Absolutbetrag von a** (auch **Betrag** genannt) wie folgt abschnittsweise definiert (als Symbol schreibt man $|a|$):

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Der Betrag einer reellen Zahl ist stets positiv oder Null.
Es gilt also: $|a| \in \mathbb{R}_+$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Hier ein paar Beispiele:

$$|5| = 5 \qquad |-1| = -(-1) = 1 \qquad |1-4| = |-3| = -(-3) = 3$$

Anschaulich beschreibt der Betrag von a, also $|a|$, den Abstand von der reellen Zahl a zur Null auf dem reellen Zahlenstrahl.

Dann ist auch sofort klar, dass $|a| \geq 0$ gelten muss, denn ein Abstand ist nie negativ!

Aus dem letzten Beispiel $|1-4| = |-3| = 3$ können wir eine weitere Erkenntnis ziehen. Mit Hilfe des Betrags lässt sich auch der Abstand von zwei beliebigen reellen Zahlen bestimmen:

Definition (9.2)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ wird durch

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{falls } a-b \geq 0, \\ -(a-b), & \text{falls } a-b < 0. \end{cases}$$

der Abstand zwischen a und b auf dem Zahlensstrahl abschnittsweise definiert: Beachte: Setzt man $b = 0$, dann erhält man die Definition 9.1.

Versuchen wir mal herauszufinden, von welchen Zahlen der Abstand gesucht wird:

$|1-2| \rightarrow$ Gesucht: Abstand von $a = 1$ zu $b = 2$. Also $|1-2| = |-1| = 1$

$|-4+2| = |-4-(-2)| \rightarrow$ Gesucht: Abstand von $a = -4$ zu $b = -2$. Also $|-4+2| = 2$

Da es natürlich recht leicht ist, $|a - b|$ zu berechnen, wenn a und b bereits bekannt sind, erhöhen wir nun die Schwierigkeit. Im Folgenden wollen wir alle Lösungen von Betragsgleichungen finden. Hier ein Einführungsbeispiel:

Beispiel (9.3)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung $|x + 3| = 1$ erfüllen.

In diesem Fall hier kann man die Aufgabe leicht als Abstandsproblem formulieren und dann direkt lösen:

$$|x + 3| = |x - (-3)| = 1$$

Wir suchen also alle $x \in \mathbb{R}$, die zu der reellen Zahl -3 einen Abstand von 1 auf dem Zahlenstrahl besitzen. Wie lautet also die Lösung?

Ganz genau! Die Zahlen -2 und -4 haben einen Abstand von 1 zur Zahl -3.

Geben wir noch die entsprechende Lösungsmenge an:

$$\mathbb{L} = \{-2, -4\}$$

Betragsgleichungen kann man jedoch nicht immer einfach anschaulich lösen. Also brauchen wir eine Rechen-Methode.
Dazu brauchen wir den Begriff der **Fallunterscheidung** bei Beträgen, denn der Betrag ändert ja nur etwas $(\cdot(-1))$, wenn das Innere negativ ist:

Bemerkung (9.4)

Eine Fallunterscheidung bei Betragsgleichungen hat zwei Fälle:

- **1. Fall:** Im Innern des Betrags (zwischen den Betragsstrichen!) steht etwas ≥ 0
- **2. Fall:** Im Innern des Betrags (zwischen den Betragsstrichen!) steht etwas < 0

Im 1. Fall kann man dann die Betragsstriche einfach weglassen und die Gleichung dann wie gewohnt einfach **ohne Beträge** lösen.

Im 2. Fall lässt man die Beträge ebenfalls weg, schreibt dann aber (-1) vor den Ausdruck und löst anschließend die Gleichung wieder **ohne Beträge**.

Hinweis: Das Innere eines Betrags nennt man auch das **Argument** des Betrags.

9.1 - Beträge

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung $|x+3| = 1$ erfüllen.

Rechnen wir die Aufgabe mal mit Fallunterscheidungen:

Wir sehen uns zuerst an, für welche $x \in \mathbb{R}$ das Argument (also das Innere) des Betrages Null wird:

$$x + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -3$$

Also: Fall 1: $x \geq -3$:

$$x + 3 = 1 \Longleftrightarrow x = -2$$

Checken, ob $x = -2$ mit der Fallbedingung vereinbar ist, welche lautet: $x \geq -3$: Jo ! Also ist $\mathbb{L}_1 = \{-2\}$.

Fall 2: $x < -3$:

$$-(x+3) = 1 \Longleftrightarrow -x - 3 = 1 \Longleftrightarrow x = -4$$

Checken, ob $x = -4$ mit der Fallbedingung vereinbar ist, welche lautet: $x < -3$: Jo ! Also ist $\mathbb{L}_2 = \{-4\}$.

Wir haben nun die Lösungsmengen für alle zu betrachtenden Fälle berechnet. Die Gesamtlösungsmenge ist dann die Vereinigung dieser Lösungsmengen.

$$\text{Zusammen folgt:} \quad \mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-4, -2\}$$

Beispiel (9.5)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung $|2x - 2| = x$ erfüllen.

Wir schauen uns zunächst an, wann das Argument des Betrags (also das Innere) gleich Null wird, damit wir anschließend eine Fallunterscheidung machen können:

$$2x - 2 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1$$

Wir machen also eine Fallunterscheidung bei $x = 1$. Die Fälle lauten: $x \geq 1$ und $x < 1$.

1. Fall: $x \geq 1$: $|2x - 2| = x \iff 2x - 2 = x \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$

Wichtig: Diese Lösung $x = 2$ vergleichen wir jetzt noch mit unserem **Fall** bzw. der Einschränkung für diesen Fall. Hier: $x \geq 1$. Da die Lösung $x = 2$ tatsächlich ≥ 1 ist, haben wir hier dann die Lösung für Fall 1: $\boxed{\mathbb{L}_{\mathbb{1}} = \{2\}}$

Beispiel (9.5)

2. Fall: $x < 1$:

$$|2x - 2| = x \iff -(2x-2) = x \iff -2x + 2 = x \iff -3x = -2 \iff x = \frac{2}{3}$$

Die Lösung $x = \frac{2}{3}$ ist zulässig, da sie der Fall-Bedingung $x < 1$ genügt.

Allso ist die Lösung für den Fall 2: $\boxed{\mathbb{L}_2 = \left\{ \frac{2}{3} \right\}}$

Also:

$$\boxed{\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\} \cup \left\{ \frac{2}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, 2 \right\}}$$

Hinweis: Die x-Werte, bei denen das Innere des Betrags Null wird, nennen wir **kritische Stellen**.

Bemerkung (9.6)

WICHTIG bei Betragsgleichungen: Überprüft **immer**, ob die Lösungsmenge eines Falles auch die Bedingung des Falles erfüllt! Falls nicht, dann besitzt dieser Fall die leere Menge als Lösung.

Noch ein Beispiel:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$|3x - 4| = 2x + 1$$

Kritische Stelle (also wo wird der Betrag im Inneren Null?) bestimmen:

$$3x - 4 = 0 \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3}$$

Also zwei Fälle: Fall 1) $x \geq \frac{4}{3}$:

$$3x - 4 = 2x + 1 \iff x - 4 = 1 \iff x = 5$$

$x = 5$ stimmt überein mit der Fallbedingung $x \geq \frac{4}{3}$, also $\boxed{\mathbb{L}_1 = \{5\}}$

Fall 2) $x < \frac{4}{3}$:

$$-(3x-4) = 2x+1 \iff -3x+4 = 2x+1 \iff -5x = -3 \iff x = \frac{3}{5}$$

$x = \dfrac{3}{5}$ stimmt überein mit der Fallbedingung $x < \dfrac{4}{3}$, also $\boxed{\mathbb{L}_2 = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}}$

Also zusammen:

$$\boxed{\mathbb{L}_{ges} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{5\} \cup \left\{\frac{3}{5}\right\} = \left\{\frac{3}{5}, 5\right\}}$$

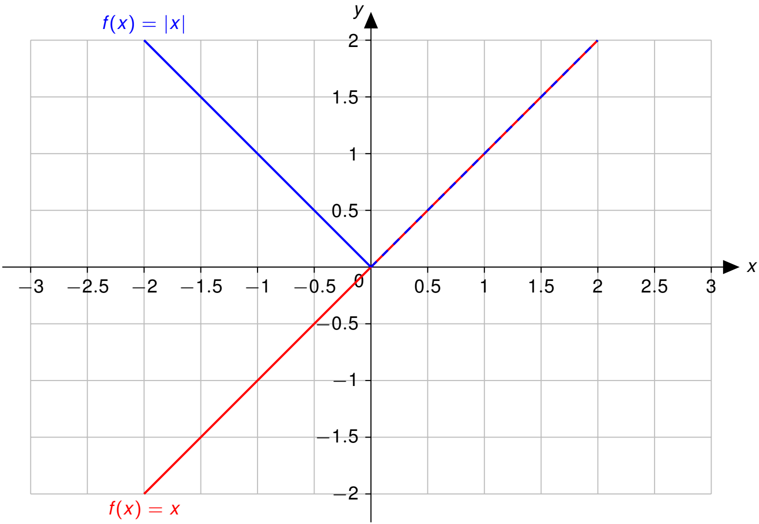
Sehen wir uns mal die Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ an, die sogenannte **Betragsfunktion**:

Ausführlich / **abschnittsweise** geschrieben sieht das dann so aus:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Sehen wir uns mal zusammen den Graph an...

9.2 - Betragsfunktion



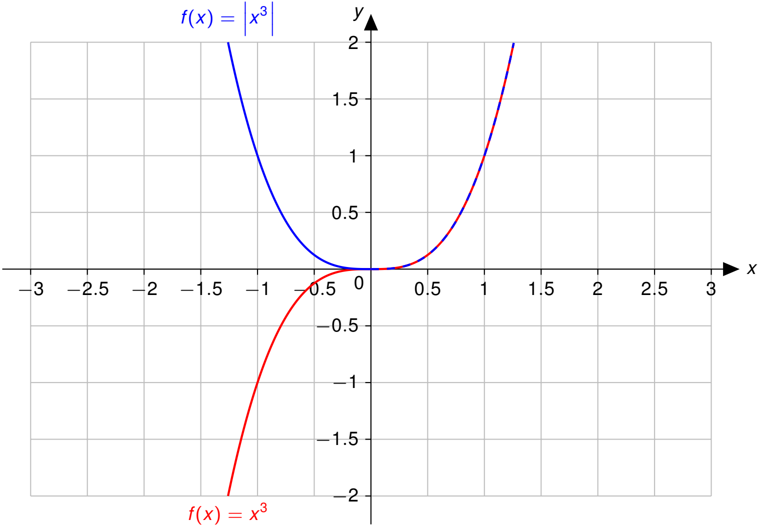
Sehen wir uns mal die Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x^3|$ an:

Ausführlich / **abschnittsweise** geschrieben sieht das dann so aus:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Sehen wir uns auch hier mal zusammen den Graph an...

9.2 - Betragsfunktion



Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit !