technische universität dortmund
fakultät für mathematik
Akad. Dir. Dr. M. Scheer • M.Sc. Maximilian Sperber

Mathematischer Vorkurs NAT-ING • Wintersemester 2024/25 • 13. September 2024

# Selbsttest zur 2. Vorkurs-Woche

**Abgabe:** Keine Abgabe! **Keine Besprechung**

**Hinweis: Kurzlösungen befinden sich auf der 2. Seite!**

### Aufgabe 1 (Bruch- und Potenzrechnung)

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

a) $1 - \dfrac{a}{a-2b} + \dfrac{b}{a+2b} - \dfrac{ab}{4b^2 - a^2}$ b) $\dfrac{3a+3b}{15a-15b} : \dfrac{18a^2+36ba+18b^2}{25b^2-50ba+25a^2}$

### Aufgabe 2 (Abbildungen)

a) Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + x^2$.

i) Skizzieren Sie die Abbildung, in dem Sie eine Wertetabelle anfertigen.

ii) Entscheiden Sie anhand des Graphen, ob die Abbildung injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist.

iii) Geben Sie das Bild von $f$ an.

iv) Geben Sie das Urbild der Menge $\mathbb{R}_{<0}$ unter der Abbildung $f$ an.

b) Betrachten Sie die Abbildung $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3 + x^2$.

i) Skizzieren Sie die Abbildung, in dem Sie die Skizze aus a) entsprechend verändern.

ii) Entscheiden Sie anhand des Graphen, ob die Abbildung injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist.

iii) Geben Sie das Bild von $g$ an.

iv) Geben Sie das Urbild der Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}$ unter der Abbildung $g$ an.

### Aufgabe 3 (Gleichungen und Nullstellen)

Bestimmen Sie alle (reelle) Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $-2x^4 + 34x^2 - 32 = 0$ b) $-2x^4 + 48x^2 = 288 - 32x^2$ c) $x^6 + 3x^4 + 2x^2 = 0$

### Aufgabe 4 (Lineare Gleichungssysteme)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 25 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 &= 42 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_3 + 8x_2 + 4x_1 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_3 + 3x_2 - x_1 &= -3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_3 + 8x_2 + 4x_1 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

### Aufgabe 5 (Beträge und Betragsgleichungen)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Betragsgleichungen erfüllen:

a) $\dfrac{3x-3}{|x+1|} + 10 = 1$ b) $|2x+3| - 20 = |3x-12|$ c) $\big||x-2| - 2\big| = 1$

**Kurzlösungen zu Aufgabe 1**

a) $-\dfrac{6b^2}{a^2-4b^2}$

b) $\dfrac{5(a-b)}{18(a+b)}$

**Kurzlösungen zu Aufgabe 2**

a)

i) Wertetabelle erstellen, Punkte eintragen, Graphen malen

ii) Die Abbildung ist nicht injektiv, da bspw. $f(-1) = 0 = f(0)$ gilt. Der Wert $y = 0$ wird also zweimal getroffen und zwar von $x = -1$ bzw. $x = 0$. Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = y$. Da $f$ nicht injektiv ist, ist $f$ auch nicht bijektiv.

iii) Es gilt: Bild$(f) = \mathbb{R}$.

iv) Es gilt: $f^{-1}(\mathbb{R}_{<0}) = \mathbb{R}_{<1}$

b)

i) Wertetabelle erstellen, Punkte eintragen, Graphen malen

ii) Die Abbildung ist injektiv, da es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ höchstens ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $g(x) = y$. Die Abbildung ist nicht surjektiv, da es bspw. zu $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $g(x) = -1$. Da $g$ nicht surjektiv ist, ist $g$ auch nicht bijektiv.

iii) Es gilt: Bild$(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

iv) Es gilt: $g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

**Kurzlösungen zu Aufgabe 3**

a) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1, x_4 = -1$

b) $x_1 = 6, x_2 = -6, x_3 = 2, x_4 = -2$

c) $x_1 = x_2 = 0$

**Kurzlösungen zu Aufgabe 4**

a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\mathbb{L} = \{\}$

**Kurzlösungen zu Aufgabe 5**

a) $\{-\frac{1}{2}, -2\}$

b) $\{\}$

c) $\{-1, 1, 3, 5\}$