

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 1

Abgabe nach Vereinbarung

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Es gelte $\text{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass jede ebene affine Kurve vom Grad 2 bis auf Koordinatenwechsel und Translation in der affinen Ebene \mathbb{A}^2 über K eine der folgenden ist:

$x^2 + y^2 - 1$	Kreis
$x^2 - y$	Parabel
$x^2 - y^2$	schneidendes Geradenpaar
$x^2 - 1$	paralleles Geradenpaar

Zusatz: Warum taucht die Hyperbel nicht als weiterer Fall auf?

2. Es gelte $\text{char}(K) \neq 2, 3$. Betrachte die kubische Schleifenkurve

$$C_\lambda = \mathcal{V}(y^2 - x^2(x - \lambda))$$

für $\lambda \in K$ und die Abbildung

$$\psi: C_\lambda \dashrightarrow \mathbb{A}^1, (x, y) \mapsto y/x.$$

Konstruieren Sie eine Umkehrabbildung $\varphi: \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$ von ψ und zeigen Sie damit, dass C_λ eine rationale Kurve ist.