Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Wintersemester 2017/2018

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 5
Abgabe bis Freitag, 17. November

Sei immer K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

9. Seien $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist f reduziert, wenn $\langle f \rangle$ ein Radikalideal ist.
(b) Genau dann gilt $\mathcal{V}(f) \subset \mathcal{V}(g)$, wenn g eine Potenz von f teilt.

10. Zeigen Sie, dass jedes Radikalideal von $K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Durchschnitt von maximalen Idealen ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Nullstellensatz.)

11. Ein Ring R heißt *reduziert*, wenn $a^k = 0 \Rightarrow a = 0$ für alle $k \geqslant 0$ und alle $a \in R$ gilt.
Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist R/I ein reduzierter Ring, wenn I ein Radikalideal ist.
(b) Genau dann ist R/I nullteilerfrei (also ein Integritätsring), wenn I ein Primideal ist.
(c) Genau dann ist R/I ein Körper, wenn I ein maximales Ideal ist.