Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Wintersemester 2017/2018

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 6
Abgabe bis Freitag, 24. November

Sei immer K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

12. Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, I ein Ideal in R und J ein Ideal in S. Zeigen Sie:

(a) $\varphi^{-1}(J)$ ist ein Ideal in R.

(b) Falls φ surjektiv ist, dann ist $\varphi(I)$ ein Ideal von R.

(c) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass $\varphi(I)$ im allgemeinen kein Ideal von R zu sein braucht.

13. (a) Es sei C_1 die Parabel $\mathcal{V}(y - x^2)$. Zeigen Sie, dass $K[C_1]$ zum Polynomring in einer Variablen isomorph ist und damit C_1 zur affinen Geraden.

(b) Sei C_2 die Hyperbel $\mathcal{V}(1 - xy)$. Zeigen Sie, dass $K[C_2]$ nicht zum Polynomring in einer Variablen isomorph ist. (*Hinweis:* Welche Einheiten gibt es in $K[C_2]$?)

14. Es sei $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Die Varietät $V = \mathcal{V}(I)$ sei endlich und bestehe aus d Punkten in $\mathbb{A}^n$. Zeigen Sie:

(a) Der Koordinatenring $K[V]$ ist ein K-Vektorraum der Dimension d.

(b)* Der Restklassenring $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ ist endlichdimensional über K.