Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Wintersemester 2017/2018

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 7
Abgabe bis Freitag, 1. Dezember

15. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und $V = \mathcal{V}(I)$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist ein Element $f \in K[V]$ eine Einheit, wenn $f(p) \neq 0$ für alle $p \in V$ gilt.
(b) Ist $f \in \mathcal{I}(V)$, so ist $1 + f$ eine Einheit in $K[x_1, \ldots, x_n]/I$.

16. Auf $\mathbb{Z}_+^n$ sei eine totale Ordnung $<_{\mathsf{grevlex}}$ wie folgt definiert:

$$\alpha <_{\mathsf{grevlex}} \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} |\alpha| < |\beta| \text{ oder} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ und } \ \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n, \alpha_i > \beta_i \\ \qquad\qquad\qquad \text{für ein } i \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $<_{\mathsf{grevlex}}$ eine Monomordnung ist. Sie wird *grad-revers-lexikographische Ordnung* genannt. Es hat sich gezeigt, dass sie für viele Anwendungen besonders effizient ist.

17. Sei K ein Körper. Gegeben seien die folgenden drei Polynome in $K[x, y, z]$:

$$f = x^3 - x^2y - x^2z, \quad g_1 = x^2 - z, \quad g_2 = xy - 1.$$

(a) Verwenden Sie den Divisionsalgorithmus bezüglich glex, um die folgenden Reste zu berechnen:
   (i) den Rest r_1 von f bei Division durch (g_1, g_2);
   (ii) den Rest r_2 von f bei Division durch (g_2, g_1).
(b) Seien r_1 und r_2 die Reste aus (a) und setze $r = r_1 - r_2$. Berechnen Sie den Rest von r bei Division durch (g_1, g_2).