Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Sommersemester 2017/2018

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 18
Abgabe bis Dienstag, 22. Mai, 12:00 Uhr in Briefkasten 11

41. Es sei $C \subset \mathbb{P}^3$ die verdrehte Kubik, das Bild der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,\ [x,y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3].$$

(a) Es seien $f_0 = z_0z_2 - z_1^2$, $f_1 = z_0z_3 - z_1z_2$, $f_2 = z_1z_3 - z_2^2$. Beweisen Sie, dass $C = \mathcal{V}_+(f_0, f_1, f_2)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass C in keiner Ebene in $\mathbb{P}^3$ enthalten ist.

(c) Bestimmen Sie die Varietät $\mathcal{V}_+(f_0, f_1)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}_+(C)$ nicht von zwei Elementen erzeugt wird. (*Hinweis:* Welche linearen und quadratischen Formen liegen in $\mathcal{I}_+(C)$?)

(e) Es seien

$$g_1 = z_0z_2 - z_1^2 \quad \text{und} \quad g_2 = z_2(z_1z_3 - z_2^2) - z_3(z_0z_3 - z_1z_2).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}_+(g_1, g_2) = C$ gilt. Erklären Sie den Zusammenhang mit (e).

Bemerkung: Man kann sich überlegen, dass $\mathcal{I}_+(C) = \langle f_0, f_1, f_2\rangle$ gilt. Das Ideal $\mathcal{I}_+(C)$ wird also von drei Elementen erzeugt.

42. Es sei $C \subset \mathbb{P}^n$ die rationale Normalkurve, also das Bild der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n, [x,y] \mapsto [x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n].$$

(a) Bestimmen Sie quadratische Formen, die C definieren.

(b) Zeigen Sie: Jede Menge von $d+1$ verschiedenen Punkten auf C ist projektiv unabhängig (also ein homogenes Koordinatensystem). (*Hinweis:* Vandermonde-Matrizen)