Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 1
Abgabe am 4. Mai in der Vorlesung

1. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f ein Isomorphismus, dann ist f^{-1} eindeutig bestimmt.
(b) Sind f und g Isomorphismen, dann auch $g \circ f$ und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
(c) Wenn $g \circ f$ ein Isomorphismus ist, sind dann auch f oder g Isomorphismen?

2. Für eine Gruppe G bezeichne $Z(G)$ ihr Zentrum. Geben Sie ein Beispiel für einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ mit $f(Z(G_1)) \not\subset Z(G_2)$. (Das Zentrum ist *nicht funktoriell*.)

3. Ein *initiales Objekt* in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein $\mathcal{C}$-Objekt I derart, dass $\mathrm{Hom}(I, X)$ für jedes $\mathcal{C}$-Objekt X genau einen Pfeil enthält.

Ein *finales Objekt* in $\mathcal{C}$ ist ein $\mathcal{C}$-Objekt F derart, dass $\mathrm{Hom}(X, F)$ für jedes $\mathcal{C}$-Objekt X genau einen Pfeil enthält.

(a) Je zwei initiale Objekte I und I' in $\mathcal{C}$ sind isomorph. (Das Entsprechende gilt für finale Objekte.)
(b) Die Kategorie der Gruppen besitzt ein Objekt, das zugleich initial und final ist.
(c) Gibt es initiale oder finale Objekte in der Kategorie aller nichtleeren Mengen?

4. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, in der die Objekte Paare (G, g) aus einer Gruppe G und einem Element $g \in G$ sind und die Pfeile $f\colon (G, g) \to (G', g')$ Gruppenhomomorphismen $f\colon G \to G'$ mit $f(g) = g'$. Finden Sie ein initiales Objekt in $\mathcal{C}$.