Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 4
Abgabe bis Freitag, 26. Mai

13. Verwenden Sie die Newton-Identitäten, um die Potenzsummen

$$p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5$$

als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen darzustellen.

14. Sei K ein Körper. Zeigen Sie direkt, dass jede symmetrische rationale Funktion $h \in K(x_1, \ldots, x_n)$ eine Darstellung $h = \frac{f}{g}$ mit symmetrischen Polynomen f und $g \neq 0$ besitzt. (*Hinweis:* Untersuchen Sie die Gleichheit $f^\pi g = f g^\pi$ für $\pi \in S_n$.)

15. Es sei R ein Integritätsring der Charakteristik $\neq 2$ (d.h. es gelte $2 \neq 0$ in R).
Ein Polynom $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ heißt *alternierend*, wenn

$$f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}(\pi) f(x_1, \ldots, x_n)$$

für alle Permutationen $\pi \in S_n$ gilt. Sei

$$\Delta = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \in R[x_1, \ldots, x_n].$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes alternierende Polynom f hat eine Faktorisierung

$$f = \Delta \cdot g,$$

wobei g ein symmetrisches Polynom ist.

(b) Die Menge aller Polynome in $R[x_1, \ldots, x_n]$, die symmetrisch oder alternierend sind, bilden den Teilring $R[e_1, \ldots, e_n, \Delta]$.

16. Es sei K ein Körper und $f \in K[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad n. Zeigen Sie:

(a) Falls f über einer Körpererweiterung L von K in Linearfaktoren

$$f = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)$$

mit $\alpha_1, \ldots, a_n \in L$ zerfällt, dann gilt $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K$ für jedes symmetrische Polynom $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Die entsprechende Aussage ist im allgemeinen falsch, wenn g alternierend ist.