Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 5
Abgabe am Donnerstag, dem 1. Juni, in der Vorlesung

17. Es sei K ein unendlicher Körper. Beweisen Sie die folgende Dichtheitsaussage: Sind $f, g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$, $h \neq 0$ und gilt $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$ für alle $a \in K^n$ mit $h(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, so folgt $f = g$.
(*Zusatz:* Vervollständigen Sie damit den Beweis von Satz 4.9(4).)

18. Zeigen Sie:

(a) Für $f = x^3 + ax^2 + bx + c$ ist

$$D(f) = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc.$$

(b) Für $f = ax^4 + bx^2 + c$ ist

$$\operatorname{Res}(f, f') = 16a^2c(4ac - b^2)^2.$$

19. Es sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie für Diskriminante und Resultante von Polynomen $f, g \in R[x]$ die Gleichheit

$$D(fg) = D(f)D(g)\operatorname{Res}(f, g)^2.$$

20. Zeigen Sie, dass die Resultante $\operatorname{Res}(f, g)$ als Polynom in den Koeffizienten von f und g mit Koeffzienten in $\mathbb{Z}$ irreduzibel ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie Satz 4.9(4).)