Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 8
Abgabe am Donnerstag, dem 22. Juni in der Vorlesung

Es sei stets R ein kommutativer Ring.

29. Seien I und J Ideale in R. Zeigen Sie:

(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
(b) $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$
(c) $\sqrt{I} = R \quad \Leftrightarrow \quad I = R$.
(d) $\sqrt{I} \cdot \sqrt{J} \subset \sqrt{IJ}$; geben Sie ein Beispiel, in dem die andere Inklusion nicht gilt.

30. (a) Zeigen Sie, dass ein Element von R genau dann nilpotent ist, wenn es in jedem Primideal von R enthalten ist.
(*Hinweis:* Sei $a \in R$ mit $a^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie ein maximales Element der Menge $\{I \mid I \text{ ist Ideal mit } a^n \notin I \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.)
(b) Sei I ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ der Durchschnitt aller Primideale ist, die I enthalten.

31. Es sei $I \neq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Das Ideal I ist primär.
(2) Jeder Nullteiler von R/I ist nilpotent.
(3) Das Nullideal in R/I ist primär.

32. (a) Sind I und J Primärideale von R mit $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, dann ist auch $I \cap J$ primär mit $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I}$.
(b) Was sagt das über die Primärzerlegungen eines Ideals in einem noetherschen Ring?