Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 10

Abgabe am Donnerstag, dem 6. Juli in der Vorlesung

Sei immer R ein kommutativer Ring mit Eins.

37. Sei $M \subset R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass R/M^i für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein lokaler Ring ist.

38. Es sei R ein Integritätsring. Für jedes Primideal P fassen wir R_P als Teilring von $\mathrm{Quot}(R)$ auf. Beweisen Sie die Gleichheit

$$R = \bigcap_{\substack{M \subset R \\ \text{maximales Ideal}}} R_M.$$

39. Es sei M ein R-Modul. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in M$ gilt $x = 0$ genau dann, wenn $\frac{x}{1} = 0$ in M_Q für alle maximalen Ideale Q von R gilt.

(b) Genau dann ist $M = \{0\}$, wenn $M_Q = \{0\}$ für alle maximalen Ideale Q von R gilt.

(c) Es sei $\varphi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Genau dann ist φ injektiv (bzw. surjektiv), wenn $\varphi_Q\colon M_Q \to N_Q$ für alle maximalen Ideale Q von R injektiv (bzw. surjektiv ist).

40. Für jeden R-Modul M setze

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P \subset R \mid P \text{ ist Primideal mit } M_P \neq 0\}.$$

Zeigen Sie: Ist

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln, so gilt $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$.