Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 11

Abgabe am Donnerstag, dem 13. Juli in der Vorlesung

Sei immer R ein kommutativer Ring mit Eins.

41. Es sei A eine R-Algebra. Zeigen Sie: Ist A ganz über R und $r \in R$ eine Einheit in A, dann ist r bereits eine Einheit in R.

42. Beweisen Sie die folgende Variante von Prop. 9.7 aus der Vorlesung: Es sei $I \subset R[t]$ ein Ideal und $A = R[t]/I$. Schreibe $x = t + I$ für die Restklasse von t in S. Für $n \in \mathbb{N}$ sind äquivalent:

(i) Die Elemente $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ sind eine R-Basis von A.
(ii) Der R-Modul A ist frei vom Rang n (also $A \cong R^n$)
(iii) Das Ideal I wird von einem normierten Polynom vom Grad n erzeugt.

43. Es sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K und sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie: Genau dann ist $x \in L$ ganz über R, wenn das (normierte) Minimalpolynom von x über K Koeffizienten in R hat.
(*Hinweis:* Verwenden Sie das Gaußsche Lemma.)
Bemerkung: Diese Aussage stimmt auch, wenn R lediglich ganz abgeschlossen ist (aber nicht ganz ohne Voraussetzung an R).

44. Es seien A und B zwei R-Algebren. Zeigen Sie:

(a) Sind $x_1, \dots, x_n \in A$ und ist x_i ganz über $R[x_1, \dots, x_{i-1}]$ für $i = 2, \dots, n$, dann ist $R[x_1, \dots, x_n]$ ein endlicher R-Modul.
(b) Ist $A \subset B$, A ganz über R und B ganz über A, dann ist B ganz über R.