Daniel Plaumann
Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2017

10. TENSORPRODUKTE

Arbeitsblatt

Lesen Sie den Text sorgfältig und lösen Sie möglichst viele der Übungsaufgaben. Diskutieren Sie die Lösungen.

Sei im folgenden immer R ein kommutativer Ring mit Eins.

Das Tensorprodukt dient der Beschreibung von bi- oder multi-linearen Abbildungen zwischen Moduln oder Vektorräumen.

Definition. Es seien M, N, P drei R-Moduln. Eine Abbildung

$$\beta\colon M \times N \to P$$

heißt **bilinear** (über R), wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) $\beta(x + x', y) = \beta(x, y) + \beta(x', y)$ und $\beta(x, y + y') = \beta(x, y) + \beta(x, y')$ für alle $x, x' \in M$ und $y, y' \in N$.

(2) $a\beta(x, y) = \beta(ax, y) = \beta(x, ay)$ für alle $x \in M$, $y \in N$ und $a \in R$.

Beispiele. (1) Die Abbildung $R^n \times R^n \to R$, $(x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$ ist R-bilinear.

(2) Sind $\lambda\colon M \to R$ und $\mu\colon N \to R$ zwei Homomorphismen (Linearformen), dann ist das Produkt $(x, y) \mapsto \lambda(x)\mu(y)$ eine bilineare Abbildung.

Mithilfe des Tensorprodukts kann man alle bilinearen Abbildungen durch einen Modul erfassen. Wir beschreiben es zunächst axiomatisch: Seien M und N zwei R-Moduln. Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ besteht aus allen R-Linearkombinationen von **Elementartensoren** $x \otimes y$ (gelesen x tensor y), die den folgenden Rechenregeln genügen: Für alle $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ und $a \in R$ gelten

(1) $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$ und $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$.

(2) $a \cdot (x \otimes y) = ax \otimes y = x \otimes ay$

Schreiben häufig auch einfach $M \otimes N$ für $M \otimes_R N$, wenn nur ein Ring mit Spiel ist.

Übung 10.1. (a) Die beiden Regeln kann man in eine lange zusammenfassen:

$$(ax + a'x') \otimes (by + b'y') = ab(x \otimes y) + ab'(x \otimes y') + a'b(x' \otimes y) + a'b'(x' \otimes y').$$

(b) Es gilt immer $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0 \otimes 0$

Warnung: Nicht jeder Tensor ist ein Elementartensor: Im allgemeinen lässt sich eine Summe der Form $x \otimes y + w \otimes z$ nicht zu einem Elementartensor zusammenfassen.

Beispiel 10.1. Ist K ein Körper und V ein zweidimensionaler Vektorraum mit Basis v_1, v_2 über K, dann ist $V \otimes V$ ein 4-dimensionaler Vektorraum mit Basis

$$v_1 \otimes v_1,\ v_1 \otimes v_2,\ v_2 \otimes v_1,\ v_2 \otimes v_2.$$

Aus der Rechenregel (a) in Aufgabe 10.1 folgt, dass diese vier Tensoren den Raum $V \otimes V$ aufspannen (Check!). Dass sie linear unabhängig sind, zeigen wir gleich.

Wir wissen jetzt, wie man im Tensorprodukt rechnet. Um zu zeigen, dass es in dieser Form existiert und um Aussagen zu beweisen, brauchen wir eine **Konstruktion**. Formal erhält man $M \otimes_R N$ wie folgt: Wir bilden den freien Modul $\mathcal{F}$ über der Menge $M \times N$ mit Basis $\{[x, y] \mid x \in M,\ y \in N\}$. Seine Elemente sind also endliche Summen der Form

$$\sum_{(x,y)\in M\times N} a_{(x,y)}[x, y] \quad \text{mit } a_{(x,y)} \in R$$

(alle 0 bis auf endlich viele). Sei $\mathcal{B}$ der Untermodul von $\mathcal{F}$ erzeugt von allen Elementen

$$[ax + a'x', by + b'y'] - ab[x, y] - ab'[x, y'] - a'b[x', y] - a'b'[x', y']$$

mit $a, a', b, b' \in R$ und $x, x' \in M$, $y, y' \in N$. Definiere

$$M \otimes_R N = \mathcal{F}/\mathcal{B}$$

und schreibe $x \otimes y$ für die Restklasse von $[x, y]$. Dann erfüllen die Restklassen $x \otimes y$ *nach Konstruktion* die gewünschten Rechenregeln. Welche Relationen außerdem noch zwischen den Tensoren bestehen, hängt allerdings von den Moduln ab, wie wir gleich sehen werden.

Proposition 10.2. *Es seien M und N zwei R-Moduln. Dann ist durch*

$$\tau\colon \begin{cases} M \times N & \to & M \otimes N \\ (x, y) & \mapsto & x \otimes y \end{cases}$$

eine bilineare Abbildung gegeben.

Beweis. Das spiegelt nur die definierenden Eigenschaften des Tensorprodukts wider. ∎

Diese bilineare Abbildung ist universell im folgenden Sinn:

Satz 10.3. *Es seien M, N und P drei R-Moduln und $\beta\colon M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus (lineare Abbildung)*

$$\varphi\colon M \otimes N \to P \quad \textit{mit} \quad \beta = \varphi \circ \tau.$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\beta"'] & M \otimes N \arrow[d, "\varphi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Übung 10.2. Beweisen Sie Satz 10.3: Definiere φ durch $\varphi(x \otimes y) = \beta(x, y)$ auf den Elementartensoren und zeige, dass dadurch ein wohldefinierter Homomorphismus mit der gewünschten Eigenschaft entsteht.

Beispiel. Für jeden R-Modul M gilt $R \otimes_R M \cong M$. Betrachte dazu die bilineare Abbildung $\beta: R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$. Dazu gehört ein Homomorphismus $\varphi: R \otimes M \to M$, der $\varphi(a \otimes x) = ax$ für jeden Elementartensor erfüllt. Dieser ist surjektiv, denn für $x \in M$ gilt $x = \varphi(1 \otimes x)$. Er ist auch injektiv. Denn φ ist offensichtlich auf den Elementartensoren der Form $1 \otimes x$ injektiv. In $R \otimes_R M$ ist aber jeder Tensor von dieser Form, denn es gilt

$$\sum(a_i \otimes x_i) = \sum(1 \otimes a_i x_i) = 1 \otimes \left(\sum a_i x_i\right).$$

Proposition 10.4. *Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $R^m \otimes R^n \cong R^{mn}$. Eine Basis von $R^m \otimes R^n$ ist gegeben durch die Elementartensoren*

$$e_i \otimes e_j, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, m.$$

Beweisskizze. Aus den Rechenregeln für das Tensorprodukt folgt sofort, dass die $e_i \otimes e_j$ den R-Modul $M \otimes N$ erzeugen. Wir müssen zeigen, dass sie R-linear unabhängig sind. Für jedes i, j definieren wir eine bilineare Abbildung $\beta_{ij}: M \times N \to R$ durch

$$\beta_{ij}(e_i, e_j) = 1 \quad \text{und} \quad \beta_{ij}(e_k, e_l) = 0 \text{ für alle } (k, l) \neq (i, j).$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts (Satz 10.3) gibt es also einen Homomorphimus $\varphi_{ij}: R^m \otimes R^n \to R$ mit

$$\varphi_{ij}(e_i \otimes e_j) = 1 \quad \text{und} \quad \beta_{ij}(e_k, e_l) = 0 \text{ für alle } (k, l) \neq (i, j).$$

Daraus folgt, dass die $e_i \otimes e_j$ linear unabhängig sind. ■

Übung 10.3. Vervollständigen Sie diesen Beweis.

Beispiel. Bei Moduln verhält sich das Tensorprodukt weniger vorhersehbar als bei Vektorräumen. Seien m und n teilerfremde ganze Zahlen. Wir wollen das Tensorprodukt

$$\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n$$

bestimmen. Wähle dazu eine Bézout-Identität $1 = pm + qn$. Schreibe für $x \in \mathbb{Z}$ einfach $\overline{x}$ für die Restklasse von x modulo m bzw.n. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{x} \otimes \overline{y} &= pm(\overline{x} \otimes \overline{y}) + qn(\overline{x} \otimes \overline{y})\\ &= p(\overline{mx} \otimes \overline{y}) + q(\overline{x} \otimes \overline{ny}) = p(\overline{0} \otimes \overline{y}) + q(\overline{x} \otimes \overline{0}) = \overline{0} \otimes \overline{0}\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{Z}$. Das gesuchte Tensorprodukt ist also der Nullmodul! Das entspricht der Tatsache, dass es außer der Nullabbildung keine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \to P$ in irgendeinen $\mathbb{Z}$-Modul P gibt.

Übung 10.4. Zeigen Sie aufbauend auf diesem Beispiel $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m, n)$.

Beispiel. Wir untersuchen den Fall von Vektorräumen noch etwas genauer. Sei wieder K ein Körper. Prop. 10.4 sagt $K^m \otimes K^n \cong K^{mn}$, wobei wir uns K^{mn} aufgrund der doppelten Indizierung der Elementartensoren am besten als Raum der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K vorstellen. Zum Beispiel hat $K^2 \otimes_K K^2$ die Basis

$$e_1 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_2,\ e_2 \otimes e_1,\ e_2 \otimes e_2.$$

Ein Element von $V \otimes V$ hat also die Form

$$a_{11}(e_1 \otimes e_1) + a_{12}(e_1 \otimes e_2) + a_{21}(e_2 \otimes e_1) + a_{22}(e_2 \otimes e_2)$$

und entspricht damit der 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wie man aus der linearen Algebra weiß, kann eine solche Matrix aber zwei ganz verschiedene Dinge beschreiben: Entweder eine lineare Abbildung $K^2 \to K^2$ oder eine Bilinearform $K^2 \times K^2 \to K$. Den Unterschied sieht man daran, wie sie sich unter Basiswechsel transformiert. Welchem Objekt entspricht also der Tensor?

Dazu folgende Überlegungen: (1) Es seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum von V. Für $\lambda \in V^*$ und festes $w \in W$ erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\beta(\lambda, w)\colon V \to W,\ v \mapsto \lambda(v) \cdot w.$$

(Check!). Die Abbildung $\beta\colon V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W), (\lambda, w) \mapsto \beta(\lambda, w)$ ist bilinear (Check!). Wir bekommen also eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W).$$

Die Tensoren in $V^* \otimes W$ entsprechen also linearen Abbildungen $V \to W$.

(2) Sind hingegen $\lambda \in V^*$ und $\mu \in W^*$ zwei Linearformen, dann ist

$$V \times W \to K, \ (v, w) \mapsto \lambda(v)\mu(w)$$

eine bilineare Abbildung $V \times W \to K$. Jeder Tensor in $V^* \otimes W^*$ entspricht in dieser Weise einer bilinearen Abbildung.

(3) Wählt man Basen, wie oben etwa $V = W = K^2$, dann geht alles in Matrizen auf und der Unterschied zwischen den Begriffen in (1) und (2) ist nicht länger sichtbar.

Weiterführende Bemerkungen und Übungen:

Übung 10.5. Weil das Tensorprodukt eine *universelle Eigenschaft* erfüllt, ist es durch diese bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt (vgl. dazu *initiale Objekte* in einer Kategorie). Das heißt, sind T und T' zwei R-Moduln mit der Eigenschaft aus Satz 10.3, dann gibt einen eindeutigen Isomorphismus $T \xrightarrow{\sim} T'$.)

Übung 10.6. Sind A und B zwei R-Algebren, dann kann man $A \otimes_R B$ zu einer R-Algebra machen, indem man auf den Elementartensoren die Multiplikation definiert durch:

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$$

Übung 10.7. Finden Sie Isomorphismen für folgende Polynomringe:

(1) $R[x] \otimes R[x] \cong R[x, y]$ (als R-Algebren).

(2) Ist $R \subset L$ eine Ringerweiterung, dann gilt $R[x] \otimes_R L \cong L[x]$.

Übung 10.8. Für endlich-dimensionale Vektorräume V und W über einem Körper K gilt

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

Beweisen Sie diese Aussage analog zur Diskussion im Beispiel oben. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die entstehende lineare Abbildung $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv ist und folgern sie aus Dimensionsgründen, dass sie auch injektiv sein muss.)

Man kann auch das Tensorprodukt von mehr als zwei Moduln bilden. Dazu zeigt man, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

gibt, so dass man induktiv eindeutig ein Tensorprodukt $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ von R-Moduln bilden kann. Die universelle Eigenschaft entspricht dann n-fach multilinearen Abbildungen.

Für Vektorräume erhält man nach Wahl von Basen entsprechend multi-indizierte Elementartensoren, die gewissermaßen höherdimensionalen Matrizen entsprechen. (Für etwa $K^2 \otimes K^2 \otimes K^2$ sind das also $2 \times 2 \times 2$-Würfel von Elementen aus K. Solche Objekte werden gerade in letzter Zeit im Hinblick auf Anwendungen studiert. Ihr Verhalten ist in vieler Hinsicht komplexer und interessanter als das von Matrizen.