Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR/LEHRAMT)

Präsenzübung
24. Oktober 2016

1. Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation auf einer Menge M.
Finden Sie den Fehler in der folgenden Argumentation: *Reflexivität folgt aus den übrigen Eigenschaften. Denn $a \sim b$ impliziert $b \sim a$ und damit $a \sim a$.*

2. Beweisen Sie, dass durch

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}$ gegeben ist. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.

3. Betrachten Sie die Relation

$$a \sim b \Leftrightarrow ab \geq 0$$

auf der Menge $\mathbb{Z}$. Ist dies eine Äquivalenzrelation?

4. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

5. Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist die Abbildung f injektiv, wenn sie ein Linksinverses (unter Komposition) besitzt.
(b) Genau dann ist die Abbildung f surjektiv, wenn sie ein Rechtsinverses besitzt.
(c) Sind A und B endlich von gleicher Mächtigkeit, dann ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

6. Betrachten Sie die Abbildungsvorschrift

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \frac{m}{n} \mapsto m.$$

Was fällt Ihnen dazu ein?

7. Es sei $R = \left\{ \frac{m}{2^a 3^b} : m \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Ist R ein Integritätsring?

(c) Beweisen Sie, dass R in jedem Teilring von $\mathbb{Q}$ enthalten ist, der $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ enthält.

(d) Zeigen Sie $\frac{1}{5} \notin R$.

(e) Ist R ein Körper?

(f) Ist $\mathbb{Z}$ in R enthalten?

8. Zeigen Sie, dass

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ein Teilring von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ ist. Finden Sie einen Isomorphismus $R \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.