Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA I (BACHELOR)

Blatt 1
Abgabe am 24. Oktober bis 10:15 Uhr

1. In einem Ring R gelte $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ für alle $a, b \in R$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $2a = 0$ für alle $a \in R$.
(b) R ist kommutativ.

2. Es sei R ein Ring.

(a) Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt.
(b) Gibt es auch immer einen Ringhomomorphismus $R \to \mathbb{Z}$?

3. (a) Es sei R ein kommutativer Ring und sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) \mapsto f(x-a)$$

ein Isomorphismus des Polynomrings $R[x] \xrightarrow{\sim} R[x]$ mit sich selbst (also ein *Automorphismus*) gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage in (a) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Ring R nicht als kommutativ vorausgesetzt wird.

4. Beweisen Sie, dass jeder endliche (kommutative) Integritätsring ein Körper ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Menge aller Vielfachen eines Elements.)