

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 2

Abgabe am 31. Oktober 2016 bis 10:15 Uhr

5. Wahr oder falsch? Ein Integritätsring ist genau dann ein Körper, wenn je zwei Elemente ungleich Null assoziiert sind.
6. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie: Für $a, b \in R$ ist das Polynom $ax+b$ genau dann eine Einheit in $R[x]$, wenn b eine Einheit ist und es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$. (Ein Ringelement a mit dieser Eigenschaft heißt *nilpotent*.)
7. Es seien $c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls die Gleichung

$$x^n = c$$

eine Lösung in \mathbb{Q} hat, dann hat sie auch eine in \mathbb{Z} .

8. In dieser Aufgabe bestimmen wir die Einheiten im Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist.
- (b) Wir definieren eine Funktion $N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$N(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2.$$

Zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gilt.

- (c) Zeigen Sie, dass $a + b\sqrt{2}$ genau dann eine Einheit in R ist, wenn gilt:

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$

- (d) Folgern Sie: Falls $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit ist mit $a \geq 0$ und $b > 0$, dann gilt

$$b \leq a < 2b.$$

- (e) Zeigen Sie durch Induktion nach b , dass jede Einheit $u = a + b\sqrt{2}$ von $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit $a, b \geq 0$ die Form $u = (1 + \sqrt{2})^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ hat.

(Hinweis: Verwenden Sie, dass auch $(a + b\sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})$ eine Einheit ist.)

- (f) Folgern Sie

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^* = \{\pm(1 + \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$