Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (LEHRAMT)

Blatt 2

Abgabe am 31. Oktober 2016 bis 10:15 Uhr

5. Wahr oder falsch? Ein Integritätsring ist genau dann ein Körper, wenn je zwei Elemente ungleich Null assoziiert sind.

6. Teilen Sie das Polynom $f = x^4 + 4x^2 + x + 1$ durch $g = 2x^2 + 1$ in den Polynomringen $\mathbb{Q}[x]$ und $\mathbb{F}_5[x]$.

7. Es seien $c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls die Gleichung

$$x^n = c$$

eine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat, dann hat sie auch eine in $\mathbb{Z}$.

8. In dieser Aufgabe bestimmen wir die Einheiten im Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist.

(b) Wir definieren eine Funktion $N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ durch

$$N(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2.$$

Zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $a + b\sqrt{2}$ genau dann eine Einheit in R ist, wenn gilt:

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$

(d) Folgern Sie: Falls $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit ist mit $a \geqslant 0$ und $b > 0$, dann gilt

$$b \leq a < 2b.$$

(e) Zeigen Sie durch Induktion nach b, dass jede Einheit $u = a + b\sqrt{2}$ von $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit $a, b \geqslant 0$ die Form $u = (1 + \sqrt{2})^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ hat.
(*Hinweis*: Verwenden Sie, dass auch $(a + b\sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})$ eine Einheit ist.)

(f) Folgern Sie

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^* = \left\{\pm(1 + \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$