Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 4
Abgabe am 14. November 2016 bis 10:15 Uhr

13. Betrachten Sie die Polynome

$$f = 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4x + 5 \in \mathbb{F}_7[x] \quad \text{und} \quad g = 3x^3 + 5x^2 + 6x \in \mathbb{F}_7[x]$$

über dem Körper mit 7 Elementen. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler h von f und g und eine Darstellung der Form $h = af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{F}_7[x]$.

14. Aus einem Korb werden Eier entnommen. Werden immer 2 Eier auf einmal genommen, dann bleibt am Schluß 1 Ei übrig. Werden immer 3 entnommen, bleiben 2, bei 4 bleiben 3, bei 5 bleiben 4, bei 6 bleiben 5, und bei 7 wird der Korb leer. Wieviele Eier müssen dann mindestens im Korb gewesen sein?

Zusatz: Wie lautet die Antwort, wenn bei Entnahme von 4 Eiern auf einmal am Schluss 1 Ei übrig bleiben soll, und die übrigen Zahlen gleich bleiben?

15. Gegeben seien natürliche Zahlen q, m, n mit $q > 1$. Zeigen Sie:

(a) $q - 1$ ist ein Teiler von $q^n - 1$.
(b) Genau dann ist $q^m - 1$ ein Teiler von $q^n - 1$, wenn m ein Teiler von n ist. (*Hinweis:* Teilen Sie n mit Rest durch m.)
(c) Ist $n > 1$ und $q^n - 1$ eine Primzahl, dann ist n eine Primzahl und $q = 2$.

Bemerkung. Die Zahlen $M_n = 2^n - 1$ heißen *Mersenne-Zahlen*. Viele kleine Mersenne-Zahlen sind prim, zum Beispiel für $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$. Die größte derzeit bekannte Primzahl ist eine Mersenne-Zahl, nämlich M_n mit $n = 74\,207\,281$, eine Zahl mit gut 22 Millionen Stellen. Es wird vermutet, dass unendlich viele Mersenne-Zahlen prim sind, aber dies ist unbewiesen.

16. Beweisen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen euklidisch ist, mit Wertefunktion $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$.