

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 5

Abgabe am 21. November 2016 bis 10:15 Uhr

17. Es sei R ein Ring und I ein Ideal in R . Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:
- (a) Genau dann ist R/I kommutativ, wenn $ab - ba \in I$ für alle $a, b \in R$ gilt.
 - (b) Ist R ein Integritätsring, dann ist auch R/I ein Integritätsring.
 - (c) Ist R/I ein Integritätsring, dann ist auch R ein Integritätsring.
18. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/m$, wenn $m|n$ gilt.
19. Es sei R ein kommutativer Ring.
- (a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
 - (i) Die Teilmenge $R \setminus R^*$ ist ein Ideal.
 - (ii) Der Ring R besitzt genau ein maximales Ideal, das jedes andere Ideal $I \neq R$ enthält.
 - (b) Zeigen Sie, dass
$$R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \right\}$$
ein Teilring von \mathbb{Q} ist und die Eigenschaften in (a) besitzt. Bestimmen Sie das maximale Ideal von R .
20. Bestimmen Sie für den Ring $\mathbb{Z}/308$ die Anzahl der
- (a) Einheiten,
 - (b) Nullteiler,
 - (c) idempotenten Elemente (d.h. $a \in \mathbb{Z}/308$ mit $a^2 = a$).
- Geben Sie in (c) explizit ganze Zahlen an, die die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/308$ repräsentieren.