Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (LEHRAMT)

Blatt 5
Abgabe am 21. November 2016 bis 10:15 Uhr

17. Es sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

(a) Genau dann ist R/I kommutativ, wenn $ab - ba \in I$ für alle $a, b \in R$ gilt.
(b) Ist R ein Integritätsring, dann ist auch R/I ein Integritätsring.
(c) Ist R/I ein Integritätsring, dann ist auch R ein Integritätsring.

18. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/m$, wenn $m|n$ gilt.

19. Es sei R ein kommutativer Ring.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
  (i) Die Teilmenge $R \setminus R^*$ ist ein Ideal.
  (ii) Der Ring R besitzt genau ein maximales Ideal, das jedes andere Ideal $I \neq R$ enthält.
(b) Zeigen Sie, dass
$$R = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \right\}$$
ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist und die Eigenschaften in (a) besitzt. Bestimmen Sie das maximale Ideal von R.

20. Bestimmen Sie für den Ring $\mathbb{Z}/308$ die Anzahl der

(a) Einheiten,
(b) Nullteiler,
(c) idempotenten Elemente (d.h. $a \in \mathbb{Z}/308$ mit $a^2 = a$).

Geben Sie in (c) explizit ganze Zahlen an, die die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/308$ repräsentieren.