Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 7
Abgabe am 5. Dezember 2016 bis 10:15 Uhr

25. Zeigen Sie, dass $f(x) = x^3 + x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Bestimmen Sie das Inverse von $1 + \alpha$ im Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$ in der Form

$$(1+\alpha)^{-1} = a + b\alpha + c\alpha^2,\ \ a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

26. (a) Bestimmen Sie alle irreduziblen normierten Polynome vom Grad 2 über $\mathbb{F}_3$.

(b) Bestimmen Sie für jede Primzahl p die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 2 über $\mathbb{F}_p$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p ein Körper mit genau p^2 Elementen existiert.

27. Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $a, b \in L$. Zeigen Sie: Sind $a + b$ und ab beide algebraisch über K, dann auch a und b.

28. Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$. Ein Element $a \in K$ heißt eine *mehrfache Nullstelle* von f, wenn $(x - a)^2 | f$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist $a \in K$ eine mehrfache Nullstelle von f, wenn a eine gemeinsame Nullstelle von f und seiner Ableitung f' ist. (Dabei ist $f' \in K[x]$ die formale Ableitung von f nach x und es gelten die üblichen Ableitungsregeln.)

(b) Es gelte $\mathrm{char}(K) = 0$ und sei $g \in K[x]$ irreduzibel. Zeigen Sie: Aus $g|f$ und $g|f'$ folgt $g^2|f$. (*Hinweis.* Wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ ist g' nicht das Nullpolynom.)

(c) Es sei $p = \mathrm{char}(K)$. Für welche $p \in \mathbb{N}_0$ und welche natürlichen Zahlen $n \geqslant 2$ hat das Polynom $x^n - x \in K[x]$ eine mehrfache Nullstelle in K?