Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 8

Abgabe am 12. Dezember 2016 bis 10:15 Uhr

29. Es sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\eta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und $\vartheta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Überprüfen Sie, ob

$$(1)\ \eta \in \mathbb{Q}(\vartheta) \qquad (2)\ \vartheta \in \mathbb{Q}(\zeta, \eta)$$

gelten. (*Hinweis:* Bestimmen Sie den Grad dieser Körpererweiterungen.)

30. (a) Zeigen Sie, dass das Polynom f irreduzibel in $K[x]$ ist und bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f und seinen Grad über K:

$$(1)\ K = \mathbb{Q},\ f = x^4 + 1 \qquad (2)\ K = \mathbb{F}_3,\ f = x^3 + 2x + 1$$

(b) Es sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein kubisches Polynom. Zeigen Sie: Falls der Zerfällungskörper von f den Grad 3 über $\mathbb{Q}$ hat, dann sind alle Nullstellen von f reell.

31. (a) Es sei G eine Gruppe und seien H_1, H_2 zwei Untergruppen von G. Zeigen Sie: Falls $G = H_1 \cup H_2$, dann muss $G = H_1$ oder $G = H_2$ gelten. (Mit anderen Worten, eine Gruppe ist niemals die Vereinigung zweier echter Untergruppen.)

(b) Finden Sie eine Gruppe, die die Vereinigung von drei echten Untergruppen ist.

32. Es sei G eine nicht-leere Menge mit assoziativer Verknüpfung

$$G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh.$$

Zeigen Sie: Genau dann ist G eine Gruppe, wenn die beiden Gleichungen

$$gx = h \quad \text{und} \quad yg = h$$

für alle $g, h \in G$ Lösungen $x, y \in G$ besitzen. Wenn das der Fall ist, dann sind die Lösungen außerdem eindeutig.