Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 10
Abgabe am 9. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

37. Es sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von endlichem Index n in G. Wahr oder falsch: Für jedes $g \in G$ gilt $g^n \in N$?

38. Es sei G eine Gruppe. Die Teilmenge

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G\colon gh = hg\}$$

heißt das *Zentrum* von G. Offenbar gilt $Z(G) = G$ genau dann, wenn G abelsch ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Zentrum eine Untergruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $Z(G)$ normal in G ist.
(c) Sei H eine Untergruppe von $Z(G)$ derart, dass G/H zyklisch ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

39. (a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n.
(b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Zentrum der Diedergruppe D_n.

40. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \in D_{2n}$ eine Drehung der Ordnung $2n$ in der Diedergruppe der Ordnung $4n$. Sei H die Untergruppe $\langle a^n \rangle = \{\mathrm{id}, a^n\}$.

(a) Bestimmen Sie Repräsentanten für alle Linksnebenklassen von H in D_{2n}.
(b) Zeigen Sie, dass H normal ist mit $D_{2n}/H \cong D_n$.

41. Bonusaufgabe (+6 Punkte).

(a) Es sei $V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset A_4 \subset S_4$. Zeigen Sie, dass V eine Untergruppe von A_4 ist, die zur Kleinschen Vierergruppe isomorph ist.
(b) Zeigen Sie, dass V normal in S_4 ist und bestimmen Sie die Struktur der Faktorgruppen A_4/V und S_4/V.
(c) Finden Sie eine Untergruppe von V, die normal in V ist aber nicht in A_4.
(d) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.