Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 11

Abgabe am 16. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

42. Bestimmen Sie alle endlichen Gruppen mit nur zwei Konjugationsklassen.

43. Zeigen Sie:

(a) Ist G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, dann gilt

$$G_{gx} = gG_x g^{-1}$$

für jedes $x \in X$ und jedes $g \in G$.

(b) Jede Untergruppe ist Stabilisator: Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe, dann gibt es eine Operation von G auf einer Menge X mit $H = G_x$ für ein $x \in X$.

44. Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Diedergruppe D_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie die Klassengleichung.

45. (a) Beweisen Sie Prop. 4.6.3 aus der Vorlesung: Ist G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert, dann ist die Anzahl der Bahnen durch

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} c_g$$

gegeben, wobei c_g für $g \in G$ die Mächtigkeit von $\{x \in X \mid gx = x\}$ bezeichnet. (*Hinweis.* Betrachten Sie die Menge $\{(g,x) \in G \times X \mid gx = x\}$. In wievielen Paaren dieser Menge tauchen ein Element $g \in G$ oder ein Punkt $x \in X$ jeweils auf?)

(b) Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge X mit mindestens zwei Punkten transitiv operiert. Zeigen Sie, dass es ein Element $g \in G$ gibt, das alle Punkte von X bewegt, also mit $gx \neq x$ für alle $x \in X$.