Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (LEHRAMT)

Blatt 11

Abgabe am 16. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

42. Eine Gruppe der Ordnung 55 operiere auf einer Menge mit 18 Elementen. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei Fixpunkte gibt.

43. Es sei p eine Primzahl und G die additive Gruppe $\mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p$.

(a) Wieviele Untergruppe der Ordnung p besitzt G?

(b) Seien $x, y \in G$ mit $x \neq y$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe $H \subset G$ der Ordnung p gibt mit $x + H = y + H$.

(c) An einer sechstägigen Konferenz nehmen 25 Personen teil. Die sechs gemeinsamen Mittagessen nehmen sie an fünf Tischen mit je fünf Plätzen ein. Ist es möglich, täglich wechselnde Sitzordnungen derart festzulegen, dass jeder Teilnehmer mit jedem anderen genau einmal am gleichen Tisch sitzt?

(Aus dem bayerischen Staatsexamen, Herbst 1998)

44. Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Diedergruppe D_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie die Klassengleichung.

45. (a) Beweisen Sie Prop. 4.6.3 aus der Vorlesung: Ist G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert, dann ist die Anzahl der Bahnen durch

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c_g$$

gegeben, wobei c_g für $g \in G$ die Mächtigkeit von $\{x \in X \mid gx = x\}$ bezeichnet. (*Hinweis.* Betrachten Sie die Menge $\{(g,x) \in G\times X | gx = x\}$. In wievielen Paaren dieser Menge tauchen ein Element $g \in G$ oder ein Punkt $x \in X$ jeweils auf?)

(b) Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge X mit mindestens zwei Punkten transitiv operiert. Zeigen Sie, dass es ein Element $g \in G$ gibt, das alle Punkte von X bewegt, also mit $gx \neq x$ für alle $x \in X$.