Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 12

Abgabe am 23. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

46. (a) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 72 bis auf Isomorphie.

(b) Welche abelschen Gruppen der Ordnung 168 enthalten genau 3 Elemente der Ordnung 2?

47. Sei R ein kommutativer Ring, $R \neq \{0\}$. Dann heißt

$$H(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in R \right\}$$

die **Heisenberg-Gruppe** mit Einträgen in R. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $H(R)$ ist eine nicht-abelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(R)$.

(b) Ist p eine ungerade Primzahl, dann hat jedes Element ungleich I in $H(\mathbb{Z}/p)$ die Ordnung p.

(c) Zu welcher aus der Vorlesung bekannten Gruppe ist die Heisenberg-Gruppe $H(\mathbb{Z}/2)$ isomorph? Begründen Sie die Antwort.

48. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn zwei endliche abelsche Gruppen für jedes $n \in \mathbb{N}$ dieselbe Anzahl von Elementen der Ordnung n enthalten, dann sind sie isomorph. (*Hinweis:* Wieviele Elemente der Ordnung p^k gibt es in $\mathbb{Z}/p^k$ für $p \in \mathbb{N}$ prim und $k \in \mathbb{N}$?)

(b) Die Aussage in (a) ist falsch ohne die Voraussetzung, dass die beiden Gruppen abelsch seien. (*Hinweis:* Aufgabe 47).

49. Zeigen Sie, dass die Elemente endlicher Ordnung in der nicht-abelschen Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *keine* Untergruppe bilden. (*Vorschlag:* Suchen Sie zwei Elemente endlicher Ordnung mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$, deren Produkt unendliche Ordnung hat.)