Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (LEHRAMT)

Blatt 12

Abgabe am 23. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

46. (a) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 72 bis auf Isomorphie.
(b) Ist jede abelsche Gruppe der Ordnung 1155 zyklisch?
(c) Welche abelschen Gruppen der Ordnung 168 enthalten genau 3 Elemente der Ordnung 2?

47. Eine *Partition* einer natürlichen Zahl n ist eine additive Zerlegung

$$n = a_1 + \cdots + a_k$$

mit $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ und $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_k$.

Zeigen Sie, dass die Anzahl der abelschen Gruppen (bis auf Isomorphie) der Ordnung p^n für eine Primzahl p mit der Anzahl der Partitionen von n übereinstimmt.

Wieviele abelsche Gruppen der Ordnungen 64, 729 und 15625 gibt es?

Bemerkung: Die *Partitionsfunktion*, die einer natürlichen Zahl n die Anzahl ihrer Partitionen zuordnet, wächst sehr schnell und ist für große Werte von n nur schwer zu berechnen. Sie spielt in der Informatik und der Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Für ihr asymptotisches Verhalten haben Hardy und Ramanujan eine berühmte Formel bewiesen. (Über Ramanujan gab es kürzlich einen britischen Spielfilm, *The Man Who Knew Infinity*, in dem auch diese Formel eine Rolle spielt.)

48. Zeigen Sie: Wenn zwei endliche abelsche Gruppen für jedes $n \in \mathbb{N}$ dieselbe Anzahl von Elementen der Ordnung n enthalten, dann sind sie isomorph. (*Hinweis:* Wieviele Elemente der Ordnung p^k gibt es in $\mathbb{Z}/p^k$ für $p \in \mathbb{N}$ prim und $k \in \mathbb{N}$?)

49. Zeigen Sie, dass die Elemente endlicher Ordnung in der nicht-abelschen Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *keine* Untergruppe bilden. (*Vorschlag:* Suchen Sie zwei Elemente endlicher Ordnung mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$, deren Produkt unendliche Ordnung hat.)